

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

*СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ*



ВЫПУСК
3

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
1935

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

Р. Н. БОНЧКОВСКОГО и проф. И. И. ЧИСТЯКОВА

ВЫПУСК ТРЕТИЙ

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И НОМОГРАФИИ
МОСКВА 1935 ЛЕНИНГРАД

Т 29-6-4

АДРЕС РЕДАКЦИИ

Москва, Центр, Б. Комсомольский пер., 6, ОНТИ. Главная
редакция общетехнической литературы и номографии.

Редакция Р. Н. Бончковского.
Корректора З. В. Смирновой.

Оформление С. Л. Дыман.
Выпускающий Л. М. Волкович.

Сдано в набор 23 ноября 1934 г.

Поступило к печати 3 марта 1935 г.

Формат бумаги 62 × 94

Количество бум. листов 21/4.

Авторских листов 5,25.

Количество печ. знаков в 1 бум. листе 100352.

Уполном. Главлита № Б-15473.

Заказ № 1499.

Тираж 4000.

Изд. № 132.

4-я типография ОНТИ НКТП СССР «Красный Печатник». Ленинград, Международный, 75а.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ, ПРИВОДИМЫХ К ОДНОРОДНЫМ

В. В. Скворцов (Москва)

Приведение уравнений к однородным весьма часто, как будет показано ниже, облегчает решение системы уравнений.

Простейшими уравнениями являются пропорции с неизвестными членами. Однако в большинстве курсов алгебры учение о пропорциях ставится в особое положение и не приводится в связь с учением об уравнениях.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{array}{l} 4x = 3y, \\ 5x - 2y = 7. \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad (A)$$

Из однородного уравнения (1) находим:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4}.$$

Полагая

$$x = 3p, \quad y = 4p \quad (3)$$

и подставляя в уравнение (2), получим:

$$15p - 8p = 7,$$

откуда

$$p = 1.$$

Следовательно,

$$x = 3, \quad y = 4.$$

Можно решить ту же систему уравнений иначе; именно, представим первое из уравнений этой системы так:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4}. \quad (4)$$

На основании известного свойства пропорции из уравнения (4) получим:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{5x - 2y}{15 - 8} = \frac{5x - 2y}{7}.$$

Приняв во внимание уравнение (2), видим, что

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = 1,$$

откуда

$$x = 3, \quad y = 4.$$

Чтобы избежать при вычислениях больших чисел, весьма часто бывает выгодно исключить свободный член в одном из уравнений, приведя таким образом это уравнение к однородному. Так, например, рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{aligned} 85x - 127y &= 1, & (5) \\ 68x - 101y &= 2. & (6) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 85x - 127y &= 1, \\ 68x - 101y &= 2. \end{aligned}} \right\} \quad (B)$$

Умножая уравнение (5) на 2 и вычитая из него уравнение (6), получим:

$$102x - 153y = 0,$$

или, написав в виде пропорции:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2}.$$

Присоединив к ней какое-либо из уравнений системы (B) и воспользовавшись одним из вышеуказанных способов решения, найдем:

$$x = 3, \quad y = 2.$$

Вообще, исключая из системы уравнений

$$\begin{aligned} ax + by &= c, \\ a_1x + b_1y &= c_1 \end{aligned}$$

свободный член, получим:

$$(ac_1 - a_1c)x - (b_1c - bc_1)y = 0,$$

или

$$\frac{x}{b_1c - bc_1} = \frac{y}{ac_1 - a_1c},$$

откуда, полагая

$$x = (b_1c - bc_1)p, \quad y = (ac_1 - a_1c)p$$

и подставляя в одно из данных уравнений, получим:

$$p = \frac{1}{ab_1 - a_1b}.$$

Следовательно,

$$x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b}, \quad y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}.$$

Рассмотрим еще систему уравнений:

$$\begin{aligned} 15x - 16y + 7z &= -1, & (7) \\ 21x + 19y - 39z &= 3, & (8) \\ 20x + 23y - 43z &= 3. & (9) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 15x - 16y + 7z &= -1, \\ 21x + 19y - 39z &= 3, \\ 20x + 23y - 43z &= 3. \end{aligned}} \right\} \quad (C)$$

Вычитая почленно из уравнения (8) уравнение (9), получим однородное уравнение:

$$x - 4y + 4z = 0. \quad (10)$$

Умножая члены уравнения (7) на 3 и складывая почленно с уравнением (8), получим:

$$66x - 29y - 18z = 0. \quad (11)$$

Деля члены уравнений (10) и (11) на $-x^1$ и обозначая $\frac{y}{x} = u$, $\frac{z}{x} = v$, получим систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} 4u - 4v &= 1, \\ 29u + 18v &= 66. \end{aligned}$$

Решая ее, находим:

$$u = \frac{3}{2}, \quad v = \frac{5}{4},$$

или

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{2}, \quad \frac{z}{x} = \frac{5}{4},$$

или

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{6}, \quad \frac{x}{4} = \frac{z}{5},$$

откуда следует ряд равных отношений:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5}.$$

Следовательно,

$$x = 4p, \quad y = 6p, \quad z = 5p.$$

Подставив эти выражения в одно из уравнений системы (С), найдем, что $p = 1$ и, следовательно,

$$x = 4, \quad y = 6, \quad z = 5.$$

Подобным образом решение всякой системы линейных уравнений можно свести к решению ряда пропорций при данном условии, и этим условием является одно из уравнений системы.

Рассмотрим систему уравнений второй степени, приводимую к однородным уравнениям:

$$\begin{aligned} 5x^2 + 2xy - 13y^2 &= 5, & (12) \\ 4x^2 + 5xy - 17y^2 &= -2. & (13) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 5x^2 + 2xy - 13y^2 &= 5, \\ 4x^2 + 5xy - 17y^2 &= -2. \end{aligned}} \right\} \quad (D)$$

¹⁾ Уравнения системы (С) показывают, что по крайней мере одно из неизвестных x, y, z не равно нулю. Легко заметить, что $x \neq 0$. (Прим. ред.)

Решение этой системы уравнений способом подстановки довольно затруднительно; приводя же одно из уравнений к однородному посредством исключения свободных членов, получим:

$$30x^2 + 29xy - 111y^2 = 0.$$

Деля это уравнение на y^2 ¹⁾ и полагая

$$\frac{x}{y} = z,$$

получим:

$$30z^2 + 29z - 111 = 0,$$

откуда находим:

$$z_1 = \frac{3}{2}, \quad z_2 = -\frac{37}{15},$$

или

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{3}{2}, \quad \frac{x_2}{y_2} = -\frac{37}{15}.$$

Полагая

$$\begin{aligned} x_1 &= 3p, & y_1 &= 2p, \\ x_2 &= 37q, & y_2 &= -15q \end{aligned}$$

и подставляя в одно из данных уравнений системы (D), будем иметь уравнения:

$$45p^2 + 12p^2 - 52p^2 = 5$$

и

$$6\,845q^2 - 1\,110q^2 - 2\,925q^2 = 5,$$

откуда находим:

$$p = \pm 1, \quad q = \pm \frac{1}{\sqrt{562}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} x_1 &= \pm 3, & y_1 &= \pm 2, \\ x_2 &= \pm \frac{37}{\sqrt{562}}, & y_2 &= \mp \frac{15}{\sqrt{562}}. \end{aligned}$$

Подобным образом можно решить систему уравнений второй степени:

$$\left. \begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= p, \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 &= p_1. \end{aligned} \right\} \quad (E)$$

Вообще, если дана система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= a, \\ f(x, y) &= b, \end{aligned} \right\} \quad (F)$$

где $F(x, y)$ и $f(x, y)$ — однородные функции n -го измерения, то, исключив свободные члены, получим однородное уравнение:

$$bF(x, y) - af(x, y) = 0.$$

¹⁾ Здесь $y \neq 0$; если бы было $y = 0$, то также $x = 0$, что противоречит уравнениям (D). (Прим. ред.)

Из этого уравнения найдем, вообще говоря, n значений отношения $\frac{x}{y}$:

$$\frac{x}{y} = \frac{p_i}{q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Следовательно, можно положить $x = p_i z$ и $y = q_i z$. Внеся эти выражения в первое уравнение системы (F), найдем:

$$z^n F(p_i, q_i) = a,$$

или

$$z_k = \sqrt[n]{\frac{a}{F(p_i, q_i)}} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

а потому

$$x_k = p_i \sqrt[n]{\frac{a}{F(p_i, q_i)}}, \quad y_k = q_i \sqrt[n]{\frac{a}{F(p_i, q_i)}}.$$

Таким образом данная система уравнений имеет n^2 корней.

ЗАМЕЧАНИЯ К ОТДЕЛУ О КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЯХ

И. И. Чистяков (Москва)

1. Учению о квадратных уравнениях в учебниках алгебры обычно предшествует глава об извлечении квадратного корня из чисел, причем излагаются способы извлечения квадратного корня, как точного, так и приближенного, из целых чисел, простых и десятичных дробей. Изложение же собственно отдела о квадратных уравнениях начинается с указания на то, что в самом общем случае уравнение второй степени ¹⁾ с одним неизвестным может быть приведено к виду:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a , b и c — целые числа и $a > 0$. Эта форма уравнения часто называется неприведенной; разделяя все члены уравнения на a и обозначая $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$, ему дают форму приведенного уравнения:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Далее рассматриваются так называемые неполные квадратные уравнения видов:

$$ax^2 + bx = 0,$$

$$ax^2 + c = 0,$$

или

$$ax^2 = -c,$$

которые получаются из неприведенного уравнения соответственно при $c = 0$ и $b = 0$, и указываются способы для их решения: первого — с помощью разложения левой части его на множители и приравнивания каждого из них к нулю, а второго — с помощью извлечения

¹⁾ С рациональными коэффициентами. (Прим. ред.)

квадратного корня из обеих частей уравнения $x^2 = -\frac{c}{a}$. Наконец, излагается классический вывод формулы для решения приведенного уравнения $x^2 + px + q = 0$, основанный на представлении его в виде:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

и последующем извлечении квадратного корня из обеих его частей, причем получается:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

вставляя здесь $p = \frac{b}{a}$ и $q = \frac{c}{a}$, получают формулу для решения неприведенного квадратного уравнения в виде:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2. Таким образом при обычном изложении между предшествующим материалом — об извлечении квадратного корня из чисел — и последующим — о квадратных уравнениях — не оказывается прямой и непосредственной связи. Поэтому более естественным и методически выдержанным является иное изложение отдела о квадратных уравнениях, именно его следует начинать с рассмотрения двучленного квадратного уравнения в виде:

$$x^2 = m,$$

решение которого непосредственно приводится к извлечению квадратного корня из обеих его частей; следует только указать учащимся, что здесь обязательно брать оба знака при извлечении корня, так что это уравнение всегда имеет два корня: $x_1 = \sqrt{m}$ и $x_2 = -\sqrt{m}$, которые будут действительны при $m > 0$, оба равными нулю при $m = 0$ и мнимыми при $m < 0$. К указанному виду приводится и уравнение типа $kx^2 = l$. Переходя затем к приведенному уравнению $x^2 + px + q = 0$, можно показать, что его решение приводится к решению вышеприведенного двучленного уравнения. С этой целью воспользуемся методом подстановки; именно, положим $x = y - \frac{p}{2}$, тогда получим:

$$\left(y - \frac{p}{2}\right)^2 + p\left(y - \frac{p}{2}\right) + q = 0,$$

что после упрощения дает:

$$y^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Отсюда

$$y = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

и, следовательно,

$$x = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2}.$$

Иначе

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

или окончательно:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Этот вывод формулы для решения неприведенного квадратного уравнения, не встречающийся в учебниках алгебры, заслуживает, по нашему мнению, внимания как вариант к классическому выводу, получаемый с помощью важного общего метода — подстановки. Получив его, следует, конечно, указать, что и в этом случае оба корня уравнения будут действительными и неравными, когда $p^2 > 4q$; действительными и равными каждый $-\frac{p}{2}$, когда $p^2 = 4q$, и мнимыми при $p^2 < 4q$.

3. Переходя далее к решению числовых уравнений приведенного типа, полезно остановиться отдельно на тех случаях, когда коэффициент p — четное, и когда p — нечетное число. В первом случае $p = 2p'$, уравнение получает вид:

$$x^2 + 2p'x + q = 0,$$

а решением его будет целое выражение:

$$x = -p' \pm \sqrt{p'^2 - q}.$$

Заслуживает особого внимания тот случай, когда коэффициент p оканчивается нулем. В этом случае $\frac{p}{2}$ оканчивается цифрой 5, а такие числа, как можно показать, особенно легко возводить в квадрат, делая это даже в уме. В самом деле, пусть

$$N = 10m + 5;$$

тогда

$$N^2 = (10m + 5)^2 = 100m^2 + 100m + 25,$$

или

$$N^2 = 100m(m + 1) + 25.$$

Следовательно, N^2 содержит $m(m + 1)$ сотен и 25 единиц. Отсюда вытекает такое правило для возведения чисел, оканчивающихся цифрой 5, в квадрат: надо умножить число десятков, заключающихся в данном числе, т. е. m , на число, превышающее его на 1 (т. е. на $m + 1$), и к полученному произведению приписать 25.

Например, чтобы возвести в квадрат число 35, надо число содержащихся в нем десятков, т. е. 3, умножить на число, единицу большее, т. е. на 4, и к полученному произведению 12 приписать 25; будем иметь в результате $35^2 = 1\ 225$; подобным же образом найдем: $85^2 = 7\ 225$; $695^2 = 483\ 025$ и т. п.

Обратно, может случиться, что требуется извлечь квадратный корень из числа, оканчивающегося на 25 и обладающего тем свойством, что число сотен в нем может быть разложено на два множителя, из которых один на единицу более другого. Тогда, на основании

сказанного выше, для извлечения квадратного корня из данного числа достаточно взять меньший из полученных сомножителей и приписать к нему 5.

Например, $\sqrt{5\ 625} = 75$; $\sqrt{990\ 025} = 995$ и т. п.

Ясно, что изложенные приемы возведения в степень и извлечения квадратного корня могут быть прилагаемы и к десятичным дробям, а также к целым числам с десятичной дробью, оканчивающейся на 5.

Например:

$$0,45^2 = 0,2025; \quad 8,5^2 = 72,25$$

и т. п. Точно так же

$$\sqrt{0,3025} = 0,55; \quad \sqrt{42,25} = 6,5$$

и пр.

На основании всего изложенного выше является возможность легко решать квадратные уравнения приведенного типа в том случае, когда коэффициент p оканчивается нечетной цифрой, так как половина его будет представляться целым числом с десятичной дробью, оканчивающейся на 5, и, следовательно, легко может быть возведена в квадрат.

Например, решая уравнение

$$x^2 - 17x + 66 = 0,$$

получим:

$$x = 8,5 \pm \sqrt{72,25 - 66},$$

или

$$x = 8,5 \pm \sqrt{6,25}.$$

Следовательно,

$$x = 8,5 \pm 2,5,$$

т. е.

$$x_1 = 11; \quad x_2 = 6.$$

4. Формула для решения неприведенного квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

в учебниках алгебры обычно выводится при помощи деления обеих частей его на коэффициент a , причем получается уравнение приведенного вида:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

решая которое получаем:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Однако и эту формулу можно получить иначе, пользуясь способом подстановки. Именно, умножим обе части неприведенного уравнения на a ; получим:

$$a^2x^2 + abx + ac = 0,$$

затем положим $ax = y$; будем иметь приведенное уравнение:

$$y^2 + by + ac = 0;$$

решение его будет:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2},$$

а так как $x = \frac{y}{a}$, то

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Этот вывод также не встречается в учебниках алгебры. Полагая, что b — четное число, $b = 2b'$, можно придать предыдущей формуле по сокращении на 2 более простой вид:

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Этой формулой и следует пользоваться при решении числовых уравнений, когда b — четное число.

Так, решая с ее помощью уравнение

$$5x^2 + 6x - 11 = 0,$$

имеем:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 55}}{5},$$

т. е.

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -\frac{11}{5}.$$

Но той же формулой можно пользоваться и в тех случаях, когда b — число нечетное, применяя соображения, приведенные в предыдущем параграфе относительно возведения в квадрат чисел, оканчивающихся цифрой 5.

Так, имея уравнение

$$3x^2 + 5x - 22 = 0,$$

видим, что здесь $b' = \frac{5}{2} = 2,5$ а потому

$$x = \frac{-2,5 \pm \sqrt{6,25 + 66}}{3}$$

или

$$x = \frac{-2,5 \pm \sqrt{72,25}}{3},$$

т. е.

$$x_1 = \frac{-2,5 + 8,5}{3} = 2; \quad x_2 = \frac{-2,5 - 8,5}{3} = -\frac{11}{3}.$$

5. После вывода основных формул для решения квадратных уравнений приведенного и неприведенного типов и общего их исследования в курсах алгебры обычно выводятся выражения для суммы и произведения корней приведенного квадратного уравнения:

$$x^2 + px + q = 0,$$

т. е. формулы Виета:

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 x_2 = q.$$

Эти формулы затем используются для дальнейшего исследования корней уравнения, именно для определения их знаков в том случае,

когда они действительны и различны. Однако такой способ исследования является несколько искусственным и обычно затрудняет учащихся. Вместо него можно пользоваться непосредственным исследованием корней приведенного уравнения, т. е.

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} ; \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} .$$

Имея в виду, что здесь $p^2 > 4q$, рассмотрим два случая:

1) $q > 0$. Тогда $\sqrt{p^2 - 4q}$ будет по абсолютной величине не менее p ; поэтому, если при этом $p > 0$, то x_1 и x_2 будут оба отрицательны, если же $p < 0$, то оба положительные.

2) $q < 0$. В этом случае $\sqrt{p^2 - 4q} > p$, а {потому как при p положительном, так и при p отрицательном x_1 будет положительным, а x_2 отрицательным. Результаты этого исследования могут быть представлены следующей таблицей:

p	q	x_1	x_2
+	+	—	—
—	+	+	+
+	—	+	—
—	—	+	—

Подобно этому можно сделать исследование знаков корней неприведенного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

в том случае, когда они действительны и различны, т. е. когда $b^2 > 4ac$. Действительно, в этом случае $a > 0$ и

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

Рассматривая, подобно предыдущему, эти выражения, разберем отдельно два случая:

1) $c > 0$. Тогда $\sqrt{b^2 - 4ac}$ будет менее b по абсолютной величине, а потому при $b > 0$, x_1 и x_2 будут оба отрицательны, а при $b < 0$ оба положительные.

2) $c < 0$. В этом случае $\sqrt{b^2 - 4ac}$ будет по абсолютной величине более b , а потому каков бы ни был знак b , корень x_1 будет положитель-

ным, а x_2 — отрицательным. Результаты этого исследования можно представить такую таблицу:

b	c	x_1	x_2
+	+	—	—
—	+	+	+
+	—	+	—
—	—	+	—

6. Полезным упражнением является нахождение учащимися выражений для разности и частного корней приведенного квадратного уравнения.

Далее можно указать, что любая симметрическая функция корней квадратного уравнения x_1 и x_2 , т. е. такое выражение, в котором x_1 и x_2 можно переставить без изменения величины этого выражения, может быть выражена через p и q . Так, кроме суммы корней $x_1 + x_2$ и произведения их $x_1 x_2$ симметрическими функциями корней будут: сумма их квадратов, сумма кубов, сумма обратных величин корней и т. п., т. е.

$$x_1^2 + x_2^2; \quad x_1^3 + x_2^3; \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

и т. д.

Формулы Виета обычно используются в учебниках алгебры только для составления квадратного уравнения по его данным корням и, как уже было упомянуто, для исследования знаков корней, когда они действительны. Между тем с их помощью могут быть решаемы интересные задачи числового характера, в которых требуется найти два числа, если вопрос может быть приведен к выражению их суммы и произведения.

Приведем примеры таких задач:

1) Данное число p разделить на две части так, чтобы их сумма равнялась их произведению.

2) Число p разложить на два слагаемых так, чтобы сумма обратных им чисел равнялась также p .

7. Интересно найти условия, при которых корни квадратного уравнения оказываются рациональными. Такого исследования не дается в курсах алгебры, между тем оно легко может быть выполнено следующим образом. Для приведенного уравнения мы имеем:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad (p^2 > 4q).$$

Чтобы найти значения p , при которых x было бы рациональным, допустим, что

$$\sqrt{p^2 - 4q} = p - 2t,$$

где t — некоторое рациональное число; будем иметь:

$$p^2 - 4q = p^2 - 4tp + 4t^2,$$

откуда

$$q = t(p - t).$$

Давая здесь произвольные рациональные значения для числа t , мы можем получить сколько угодно значений q , при которых корни приведенного уравнения $x^2 + px + q = 0$ будут выражаться рациональными числами.

Так, полагая в частности $t = 1$, получим $q = p - 1$, откуда заключаем, что уравнение

$$x^2 + px + p - 1 = 0,$$

в котором свободный член на единицу менее коэффициента при x в первой степени, всегда имеет рациональные корни: $x_0 = -1$; $x_2 = 1 - p$.

Так, уравнения:

$$x^2 + 5x + 4 = 0,$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

и т. п. имеют рациональные решения. Полагая, например, $p = 10$, а $t = -3$, получим: $q = -39$, и, следовательно, уравнение

$$x^2 + 10x - 39 = 0$$

будет иметь рациональные решения: $x_1 = 3$, $x_2 = 13$.

Подобным же образом можно вывести и соотношение между коэффициентами неприведенного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, при котором корни его, выражаемые формулой:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

будут рациональными. С этой целью положим

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = b - 2at,$$

где t — некоторое неопределенное рациональное число. Освобождаясь от радикала, получим:

$$b^2 - 4ac = b^2 - 4abt + 4a^2t^2,$$

откуда по сокращении

$$c = bt - at^2.$$

При таком значении c , x будет иметь вид:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(bt - at^2)}}{2a},$$

или

$$x = \frac{-b \pm (b - 2at)}{2a},$$

откуда

$$x_1 = -t, \quad x_2 = \frac{-b+t}{a}.$$

Придавая в выведенной формуле для c количеству t какие угодно рациональные значения, будем получать квадратные уравнения, имеющие рациональные корни. В частности, полагая $t = 1$ и $t = -1$, найдем для c соответственно значения $(b-a)$ и $-(a+b)$, откуда следует, что квадратные уравнения видов:

$$ax^2 + bx + (b-a) = 0$$

и

$$ax^2 + bx - (a+b) = 0$$

всегда имеют рациональные решения; первое

$$x_1 = -1; \quad x_2 = \frac{-b+a}{a},$$

а второе

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -\frac{b+a}{a}.$$

Полагая же, например, $a = 3$, $b = 2$ и $t = 5$, найдем:

$$c = 10 - 75 = -65,$$

и уравнение примет вид:

$$3x^2 + 2x - 65 = 0.$$

Решая его, получим действительно рациональные корни:

$$x_1 = -5; \quad x_2 = \frac{13}{3}.$$

ПОКРЫТИЕ ПЛОСКОСТИ ПРАВИЛЬНЫМИ МНОГОУГОЛЬНИКАМИ

Р. Н. Бончковский (Москва)

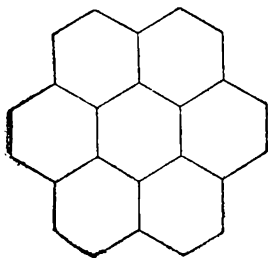
В нижеследующей статье мы будем рассматривать такие покрытия плоскости разноименными правильными многоугольниками, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) Плоскость покрыта правильными многоугольниками сплошь, без просветов и двойных покрытий.

2) Вокруг всех вершин правильные многоугольники расположены одним и тем же способом, т. е. вокруг всех вершин в одном и том же порядке следуют многоугольники одних и тех же наименований. Например, если вокруг одной вершины многоугольники расположены в последовательности: треугольник — квадрат — шестиугольник — квадрат, то и вокруг всякой другой вершины того же покрытия многоугольники расположены в той же последовательности: треугольник — квадрат — шестиугольник — квадрат.

Уже в глубокой древности были известны все возможные покрытия плоскости с помощью одноименных правильных многоугольников, именно покрытие с помощью равносторонних треугольников, покрытие с помощью квадратов и покрытие с помощью правильных шестиугольников. Каких-либо других покрытий с помощью одноименных

правильных многоугольников быть не может. Покрытия с помощью разноименных правильных многоугольников обычно не рассматривались; между тем они довольно интересны и гораздо более разнообразны.

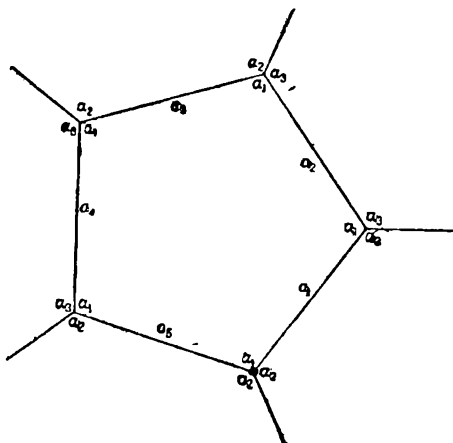


Фиг. 1.

Имея в виду условие 2, мы можем прежде всего исследовать возможные расположения многоугольников вокруг какой-либо одной вершины покрытия; вокруг остальных вершин расположение многоугольников должно быть по условию 2 таким же. Заметим, что к каждой вершине покрытия не может примыкать менее трех многоугольников, а потому угол α_1 многоугольника с наименьшим числом сторон, который является наименьшим углом, примыкающим к какой-либо вершине, не может быть более $360^\circ : 3 = 120^\circ$. Существует лишь четыре правильных многоугольника, углы которых не превышают 120° , а именно: равносторонний треугольник ($\alpha_1 = 60^\circ$, число сторон $n_1 = 3$), квадрат ($\alpha_1 = 90^\circ$, $n_1 = 4$), правильный пятиугольник ($\alpha_1 = 108^\circ$, $n_1 = 5$) и правильный шестиугольник ($\alpha_1 = 120^\circ$, $n_1 = 6$). Следовательно, все покрытия можно разделить на четыре группы; в первую группу относим те покрытия, в которых многоугольником с наименьшим числом сторон является правильный шестиугольник; во второй группе таким многоугольником является правильный пятиугольник; в третьей — квадрат; в четвертой — равносторонний треугольник.

Первая группа состоит всего из одного покрытия. Ведь, если $\alpha_1 = 120^\circ$, то сумма остальных углов, примыкающих к той же вершине, равна $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$. Поскольку каждый из этих остальных углов не менее 120° (так как угол α_1 — наименьший) и, конечно, не более 180° , то этих углов два, по 120° каждый. Мы получаем $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 120^\circ$, $n_1 = n_2 = n_3 = 6$, т. е. упомянутое ранее покрытие с помощью правильных шестиугольников (см. фиг. 1).

Во второй группе $\alpha_1 = 108^\circ$, $n_1 = 5$, и сумма остальных углов, примыкающих к той же вершине, равна $360^\circ - 108^\circ = 252^\circ$. Число этих углов равно двум, так как каждый из них по предположению не менее 108° и не более 180° . Пусть один из этих углов равен α_2 , а другой α_3 , а число сторон соответствующих многоугольников n_2 и n_3 . Обозначим стороны правильного пятиугольника в порядке обхода его контура через a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (фиг. 2). Если к стороне a_1 примыкает



Фиг. 2.

n_2 -угольник, то к соседней стороне a_2 неизбежно примыкает n_3 -угольник; к стороне a_3 — опять n_2 -угольник; к стороне a_4 — n_3 -угольник; к стороне a_5 как к стороне соседней с a_4 — n_2 -угольник. Таким образом вокруг вершины, общей сторонам a_1 и a_5 (на чертеже она отмечена жирной точкой), располагаются углы α_1 , α_2 и α_2 . Значит,

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 360^\circ,$$

отсюда

$$\alpha_2 = \frac{360^\circ - \alpha_1}{2} = \frac{360^\circ - 108^\circ}{2} = 126^\circ$$

и

$$\alpha_3 = \alpha_2 = 126^\circ.$$

Но правильных многоугольников с углом в 126° не существует; значит, во второй группе нет ни одного покрытия.

В третьей группе наименьший угол α_1 , примыкающий к какой-либо вершине, равен 90° , число сторон многоугольника с наименьшим числом сторон есть $n_1 = 4$. Остальных углов, примыкающих к той же вершине, или три, и тогда все они по 90° , или два. В первом случае

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 90^\circ \quad (n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 4),$$

и мы получаем покрытие плоскости квадратами, о котором было упомянуто выше (фиг. 3).

Во втором случае (когда число остальных углов равно двум) меньший из остальных углов должен быть не менее 90° и не более $(360^\circ - 90^\circ) : 2 = 135^\circ$, т. е. может иметь одно из следующих значений: $\alpha_2 = 90^\circ, 108^\circ, 120^\circ, 128\frac{4}{7}^\circ, 135^\circ$ (соответственно, число сторон многоугольника с углом α_2 $n_2 = 4, 5, 6, 7, 8$). Поскольку

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ,$$

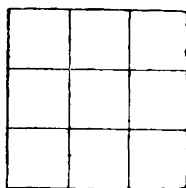
то получаем пять комбинаций:

$\alpha_1 = 90^\circ;$	$\alpha_2 = 90^\circ;$	$\alpha_3 = 180^\circ;$
$\alpha_1 = 90^\circ;$	$\alpha_2 = 108^\circ;$	$\alpha_3 = 162^\circ;$
$\alpha_1 = 90^\circ;$	$\alpha_2 = 120^\circ;$	$\alpha_3 = 150^\circ;$
$\alpha_1 = 90^\circ;$	$\alpha_2 = 128\frac{4}{7}^\circ;$	$\alpha_3 = 141\frac{3}{7}^\circ;$
$\alpha_1 = 90^\circ;$	$\alpha_2 = 135^\circ;$	$\alpha_3 = 135^\circ.$

Первая комбинация невозможна, так как не существует правильного многоугольника с углом в 180° .

Вторая комбинация тоже невозможна, потому что многоугольник с углом 108° есть пятиугольник и рассуждения, подобные рассуждениям, проведенным при рассмотрении второй группы покрытий, приводят к выводу, что $\alpha_1 = \alpha_3$, что противоречит полученным числовым значениям.

Третья комбинация дает покрытие, состоящее из квадратов ($\alpha_1 = 90^\circ$, $n_1 = 4$), шестиугольников ($\alpha_2 = 120^\circ$, $n_2 = 6$) и двенадцатиугольников ($\alpha_3 = 150^\circ$, $n_3 = 12$) (фиг. 4).

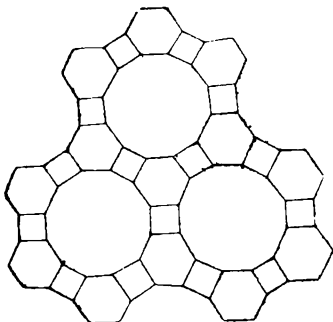


Фиг. 3.

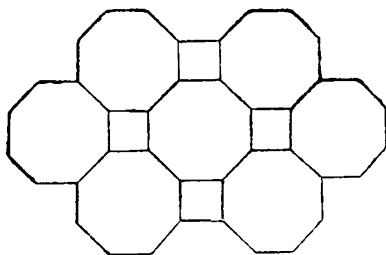
Четвертая комбинация невозможна, так как не существует правильного многоугольника с углом в $141\frac{3}{7}^\circ$.

Пятая комбинация дает покрытие, состоящее из квадратов ($\alpha_1 = 90^\circ$, $n_1 = 4$) и восьмиугольников ($\alpha_2 = \alpha_3 = 135^\circ$, $n_2 = n_3 = 8$) (фиг. 5).

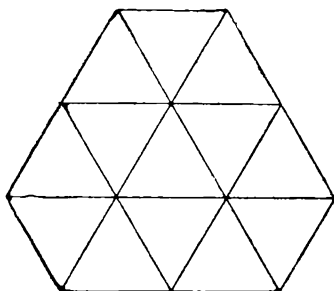
В четвертой группе покрытий $\alpha_1 = 60^\circ$, $n_1 = 3$. Сумма остальных углов равна $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$, а число их может быть равно двум, трем, четырем или пяти.



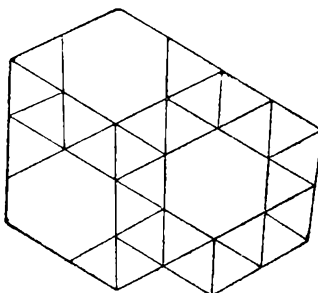
Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Если их пять, то все они по 60° , и получается покрытие из одних треугольников, о котором было упомянуто в начале статьи (фиг. 6).

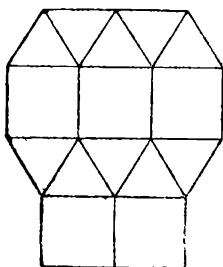
Если их четыре, то меньший из них менее 60° и не более $300^\circ : 4 = 75^\circ$; следовательно, как угол правильного многоугольника меньший из этих четырех углов может быть только 60° , $\alpha_2 = 60^\circ$. Три остальных угла составляют в сумме $300^\circ - 60^\circ = 240^\circ$; меньший из этих трех углов, угол α_3 , не менее 60° и не более $240^\circ : 3 = 80^\circ$, следовательно, $\alpha_3 = 60^\circ$. Сумма остальных двух углов равна $240^\circ - 60^\circ = 180^\circ$; это дает две возможных комбинации: $\alpha_4 = 60^\circ$, $\alpha_5 = 120^\circ$ и $\alpha_4 = \alpha_5 = 90^\circ$. Таким образом получаем две комбинации:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 60^\circ, \alpha_5 = 120^\circ \quad (n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 3, n_5 = 6);$$

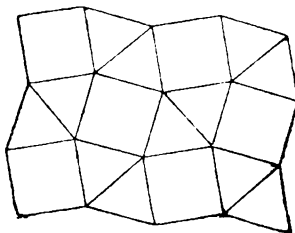
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 60^\circ, \alpha_4 = \alpha_5 = 90^\circ \quad (n_1 = n_2 = n_3 = 3, n_4 = n_5 = 4).$$

Первая комбинация дает покрытие, изображенное на фиг. 7.

Вторая комбинация дает два покрытия (фиг. 8 и 9) в зависимости от того, расположены ли многоугольники вокруг каждой вершины в порядке треугольник — треугольник — треугольник — квадрат — квадрат или в порядке треугольник — треугольник — квадрат — треугольник — квадрат.

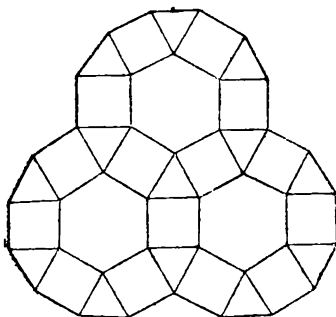


Фиг. 8.



Фиг. 9.

Если $\alpha_1 = 60^\circ$ и кроме этого угла к той же вершине примыкают еще три угла, то меньший из этих трех углов не менее 60° и не более $300^\circ : 3 = 100^\circ$. Следовательно, возможны два случая: или $\alpha_2 = 90^\circ$, или $\alpha_2 = 60^\circ$.



Фиг. 10.

В первом случае меньший из остальных двух углов, угол α_3 , не менее 90° и не более $(300^\circ - 90^\circ) : 2 = 105^\circ$; следовательно, как угол правильного многоугольника $\alpha_3 = 90^\circ$. Итак, получаем:

$$\alpha_1 = 60^\circ, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ, \quad \alpha_4 = 120^\circ$$

$$(n_1 = 3, \quad n_2 = n_3 = 4, \quad n_4 = 6).$$

Если вокруг каждой вершины многоугольники расположены в порядке треугольник — квадрат — шестиугольник — квадрат, мы получаем покрытие, изображенное на фиг. 10. Последовательность треугольник — квадрат — квадрат — шестиугольник невозможна. Действительно, предположим, что таково расположение многоугольников вокруг каждой вершины. Рассмотрим $\triangle ABC$ покрытия с таким расположением фигур (фиг. 11). Тогда к вершине A должен примыкать квадрат, имеющий с $\triangle ABC$ общую сторону; пусть этой стороной будет сторона AC ; к вершине B тоже должен примыкать квадрат, имеющий общую сторону с $\triangle ABC$; пусть этой стороной будет сторона BC . Тогда к вершине C примыкают два квадрата, имеющие общие стороны с $\triangle ABC$, что противоречит предположению.

Если же $\alpha_1 = \alpha_2 = 60^\circ$, $n_1 = n_2 = 3$, то сумма двух остальных углов $360^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 240^\circ$. Третий угол не может быть в 60° , так как тогда бы четвертый угол был в 180° , что невозможно.

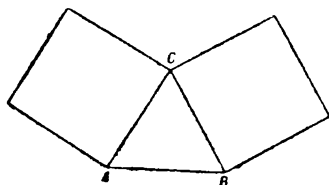
Остаются три комбинации:

$$\alpha_3 = 120^\circ; \quad \alpha_4 = 120^\circ \quad (n_3 = n_4 = 6);$$

$$\alpha_3 = 108^\circ; \quad \alpha_4 = 112^\circ;$$

$$\alpha_3 = 90^\circ; \quad \alpha_4 = 150^\circ \quad (n_3 = 4, \quad n_4 = 12).$$

Первая комбинация дает покрытие, изображенное на фиг. 12, с расположением многоугольников вокруг каждой вершины в последовательности треугольник — шестиугольник — треугольник — шестиугольник.



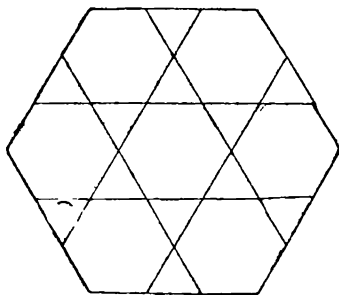
Фиг. 11.

Покрытие с расположением треугольник — треугольник — шестиугольник — шестиугольник вокруг каждой вершины существовать не может. Действительно, предположим, что ABC — треугольник, принадлежащий покрытию с таким расположением вершин (фиг. 13). Поскольку

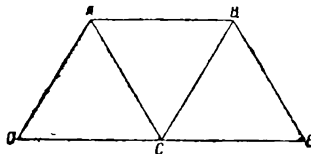
вокруг вершины A многоугольники расположены указанным образом, существует треугольник, имеющий с $\triangle ABC$ общую сторону и общую вершину A . Пусть это будет $\triangle ACD$. Точно также должен существовать треугольник, имеющий общую сторону и вершину B с $\triangle ABC$. Пусть это будет $\triangle BCE$. Тогда к вершине C примыкает три

треугольника, что противоречит предположению.

Вторая комбинация невозможна, так как не существует правильного многоугольника с углом в 112° .



Фиг. 12.



Фиг. 13.

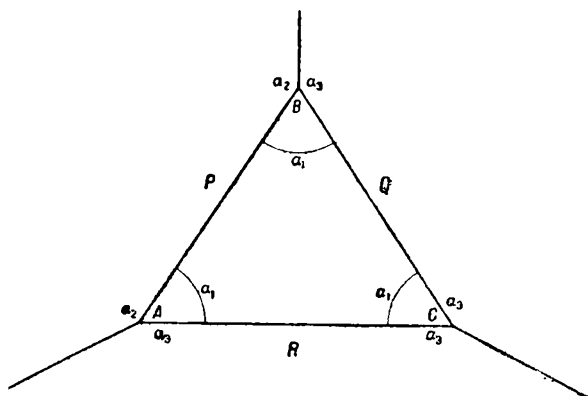
Третья комбинация тоже не дает ни одного покрытия. Здесь $\alpha_1 = \alpha_2 = 60^\circ$, $\alpha_3 = 90^\circ$, $\alpha_4 = 150^\circ$ ($n_1 = n_2 = 3$, $n_3 = 4$, $n_4 = 12$). Чтобы доказать невозможность расположения треугольник — треугольник — квадрат — двенадцатиугольник вокруг каждой вершины, достаточно повторить рассуждения, которые мы проделали при разборе первой комбинации. Расположение треугольник — квадрат — треугольник — двенадцатиугольник также невозможно, как видно из следующих рассуждений: пусть ABC — треугольник покрытия с таким расположением вершин (фиг. 11). Тогда к вершине A должен примыкать квадрат, имеющий с $\triangle ABC$ общую сторону; пусть этой стороной будет сторона AC ; к вершине B тоже должен примыкать квадрат, имеющий общую сторону с $\triangle ABC$; пусть этой стороной будет сторона BC . Тогда к вершине C примыкают два квадрата, имеющие с $\triangle ABC$ общие сто-

роны; это противоречит предположению, что вокруг каждой вершины многоугольника расположены в порядке треугольник — квадрат — треугольник — двенадцатигульник.

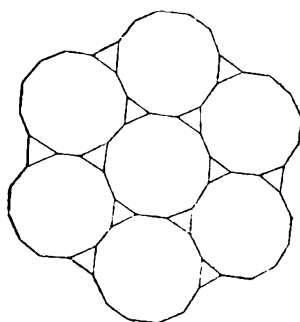
Если $\alpha_1 = 60^\circ$ и кроме этого угла к той же вершине примыкают еще два угла α_2 и α_3 , то

$$\alpha_2 = \alpha_3.$$

В самом деле, в этом случае к каждой стороне треугольника примыкает некоторый многоугольник (фиг. 14), причем эти многоуголь-



Фиг. 14.



Фиг. 15.

ники (назовем их P , Q , R) имеют попарно общие стороны, примыкающие к вершинам A , B , C . Вследствие этого, если многоугольник P имеет угол α_2 , то многоугольник Q и R как смежные с ним имеют угол α_3 , тогда вокруг вершин C располагаются углы α_1 , α_3 , α_3 ; значит,

$$\alpha_1 + 2\alpha_3 = 360^\circ$$

и

$$\alpha_3 = \frac{360^\circ - \alpha_1}{2} = \frac{360^\circ - 60^\circ}{2} = 150^\circ,$$

и поэтому $\alpha_2 = 360^\circ - \alpha_1 - \alpha_3 = 150^\circ$.

Тогда $n_2 = n_3 = 12$. Это покрытие изображено на фиг. 15.

Мы рассмотрели все возможные комбинации. Всего получилось одиннадцать покрытий и, как видно из хода рассуждений, других покрытий, удовлетворяющих условиям 1 и 2, указанным в начале статьи, не существует.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ УГЛОВ

Б. Я. Березовский (Москва)

Мы здесь хотим показать вывод формулы

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

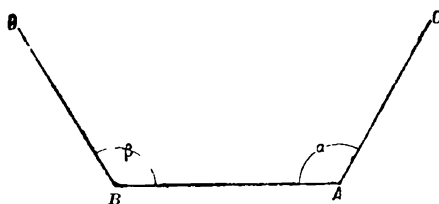
значительно отличающийся от традиционного.

Этот способ, как будет видно ниже, имеет следующие преимущества: чрезвычайно простой чертеж, наглядность вывода из чертежа, получение формулы сразу для любых углов. Для вывода формулы предварительно требуется знать теорему синусов:

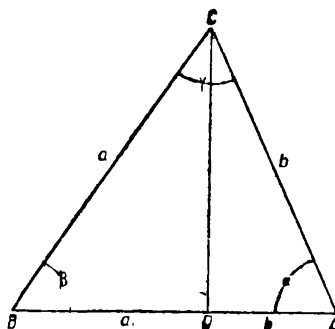
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k,$$

вернее, ее следствие

$$a = k \sin A, \quad b = k \sin B, \quad c = k \sin C.$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Пусть α и β будут два угла любой величины.

Взяв на прямой две произвольные точки A и B , построим данные углы, как указано на фиг. 1. Исключим из нашего рассмотрения очень простой случай, когда

$$AC \parallel BD,$$

т. е. когда

$$\alpha + \beta = n \cdot 180^\circ,$$

для которого справедливость формулы

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

непосредственно очевидна, ибо получим:

$$\text{левая часть} = \sin(\alpha + \beta) = \sin(n \cdot 180^\circ) = 0$$

и

$$\begin{aligned} \text{правая часть} &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \\ &= \sin \alpha \cos(n \cdot 180^\circ - \alpha) + \cos \alpha \sin(n \cdot 180^\circ - \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Могут быть шесть случаев пересечения прямых AC и BD :

Стороны AC и BD углов α и β пересекаются:

1) над прямой AB , 2) под прямой AB .

Одна из сторон AC или BD пересекается с продолжением другой:

3) над прямой AB , 4) под прямой AB .

Продолжения сторон AC и BD пересекаются:

5) над прямой AB , 6) под прямой AB .

Случай 1. Из рассмотрения фиг. 2 по теореме синусов имеем:

$$a = k \sin \alpha, \quad b = k \sin \beta,$$

после чего получаем:

$$\begin{aligned} a_1 &= a \cos \beta = k \sin \alpha \cos \beta, \\ b_1 &= b \cos \alpha = k \sin \beta \cos \alpha. \end{aligned}$$

Отсюда

$$AB = a_1 + b_1 = k(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta). \quad (1)$$

С другой стороны, на основании следствия из теоремы синусов имеем:

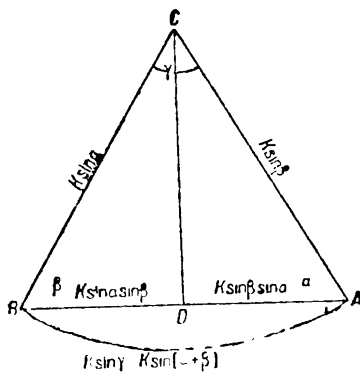
$$AB = k \sin \gamma.$$

Но

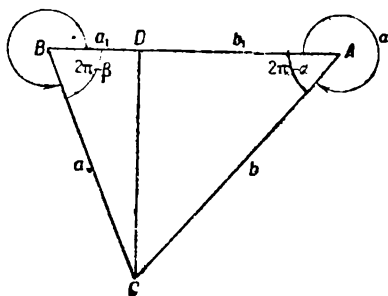
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

следовательно,

$$AB = k \sin \gamma = k \sin (\alpha + \beta). \quad (2)$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Из (1) и (2) находим:

$$k \sin (\alpha + \beta) = k (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta).$$

Сократив на k , получаем искомую формулу.

Для большей наглядности (при показе на доске) можно рекомендовать тригонометрические выражения сторон треугольника a, b, AB и отрезков a_1 и b_1 проставлять на самом чертеже, как показано на фиг. 3.

Тогда непосредственно из чертежа имеем:

$$k \sin (\alpha + \beta) = k \sin \alpha \cos \beta + k \sin \beta \cos \alpha.$$

Случай 2. Из рассмотрения фиг. 4 имеем:

$$a = k \sin (2\pi - \alpha),$$

$$b = k \sin (2\pi - \beta),$$

$$a_1 = a \cos (2\pi - \beta),$$

$$b_1 = b \cos (2\pi - \alpha),$$

следовательно,

$$AB = a_1 + b_1 = k \sin (2\pi - \alpha) \cos (2\pi - \beta) + k \sin (2\pi - \beta) \cos (2\pi - \alpha),$$

и, сделав приведение функций, получим:

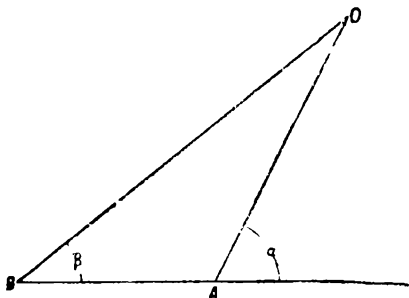
$$AB = a_1 + b_1 = -k (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta); \quad (3)$$

с другой стороны,

$$AB = k \sin \gamma = k \sin [4\pi - (\alpha + \beta)] = -k \sin (\alpha + \beta). \quad (4)$$

Из (3) и (4) получим:

$$-k \sin (\alpha + \beta) = -k (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta).$$



Фиг. 5.

Сократив на $(-k)$, получим искомую формулу сложения.

Для случаев 3—6 рассуждения остаются аналогичными тем, которыми мы пользовались выше.

Так же прост способ вывода формулы:

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

для чего углы нужно строить, как указано на фиг. 5.

Во всем остальном способ вывода формулы синуса разности аналогичен способу, применен-

ному выше для вывода формулы синуса суммы, поэтому нет необходимости его здесь демонстрировать.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ОБЪЕДИНЕНИЕ ГРУПП ОБЩИХ РЕШЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

П. И. Сапунов (г. Владимир)

При решении тригонометрических уравнений в общем виде, в зависимости от метода их решения, очень часто получающиеся ответы не совпадают по внешней форме с ответами, даваемыми авторами задачников.

Пример 1. № 233 из тригонометрии Н. Рыбкина:

$$1 - \operatorname{tg}^2 x = 2 \operatorname{tg} x.$$

1-й метод решения:

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1 = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \pm \sqrt{2},$$

$$x^I = 180^\circ n + 22^\circ 30',$$

$$x^{II} = 180^\circ n - 67^\circ 30'.$$

2-й метод решения:

Деля обе части уравнения на $1 - \operatorname{tg}^2 x$, получим:

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 1,$$

откуда

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 2x &= 1, \\ 2x &= 180^\circ n + 45^\circ, \\ x &= 90^\circ n + 22\ 30'\end{aligned}$$

Ответ в задачнике: $x = 90^\circ n + 22\ 30'$.

Учащиеся, да и сами преподаватели, зачастую затрачивают много времени, чтобы или убедиться в тождественности своих и данных ответов, или подогнать собственные ответы под ответы задачников.

Ответ на тригонометрическое уравнение должен представлять собой минимальное количество групп, не имеющих общих решений. Однако авторы в своих задачниках очень часто дают в ответах не минимальное количество групп решений, оставляя их в форме нескольких рядов чисел, тогда как они могут быть заменены меньшим количеством или даже только одним рядом чисел, а также оставляют не преобразованными такие группы решений, которые имеют общие корни.

§ 1. Бесконечная арифметическая прогрессия

Мы будем рассматривать арифметическую прогрессию, бесконечно простирающуюся в обе стороны. В этой прогрессии нет первого члена, а потому формула для любого члена бесконечной прогрессии

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

уже теряет свой обычный смысл. Члены этой прогрессии можно разбить на две группы членов, располагающихся вправо и влево от некоторого члена, называемого центральным или нулевым членом прогрессии.

Фиксируя один из членов бесконечной прогрессии нулевым номером, мы должны будем ввести двойную нумерацию для всех оставшихся членов: положительную для членов, расположенных хотя бы вправо, и отрицательную для членов, расположенных влево от нулевого. Например:

Номера членов	$-n$	\dots	-3	-2	-1	0	1	2	3	\dots	n
	$-3n+2$	\dots	-7	-4	-1	2	5	8	11	\dots	$3n+2$

Здесь за нулевой член взято наименьшее положительное число 2. Если в той же прогрессии взять за нулевой член -4 , то получим следующую картину:

Номера членов	$-n$	\dots	-2	-1	0	1	2	\dots	n
	$-3n-4$	\dots	-10	-7	-4	-1	2	\dots	$3n-4$

Формула любого члена этой прогрессии может быть написана так:

$$x_n = 3n + 2, \quad (1)$$

или так:

$$x_n = 3n - 4. \quad (2)$$

Давая n положительные значения, получим группу членов, стоящих вправо от нулевого члена; давая n отрицательные значения, получим группу членов, стоящих влево от нулевого; для $n=0$ — значение нулевого или центрального члена.

Из рассмотрения формул (1) и (2) видим, что в состав формулы общего члена бесконечной прогрессии входят два слагаемых: переменная величина — произведение разности прогрессии на переменное число n , которому можно давать только целые положительные, отрицательные или нулевые значения, и постоянная величина — значение нулевого члена, за который можно принимать любой член прогрессии.

В общем случае, если разность прогрессии P , нулевой член N , формула для любого (n -го члена) бесконечной арифметической прогрессии принимает вид:

$$x_n = P \cdot n + N. \quad (3)$$

§ 2. Преобразования формулы для любого члена бесконечной арифметической прогрессии

1. Если к нулевому члену N [в формуле (3)] прибавить или отнять разность прогрессии P , то от этого прогрессия не изменится, а только переместится нулевой член, т. е. изменится нумерация членов.

2. Если коэффициент при переменной величине n умножить на -1 , то от этого произойдет лишь перестановка правой и левой групп членов, т. е. изменится характер прогрессии: из возрастающей прогрессия превратится в убывающую, или наоборот.

На основании этих двух преобразований будем считать тождественными в смысле неизменяемости членов прогрессии следующие равенства:

$$x_n = Pn + N = Pn + (N \pm P), \quad (1)$$

$$x_n = -Pn + N = Pn + N. \quad (2)$$

Например:

$$x_n = 5n - 4 = 5n - 4 + 5 = 5n + 1.$$

$$x_n = 18n + 17 = 18n - 1.$$

$$x_n = -12n - 9 = 12n - 9 + 12 = 12n + 3.$$

Эти преобразования позволяют изменять формулу для общего члена бесконечной прогрессии так, чтобы нулевым членом было наименьшее положительное число или наименьшее число по абсолютному значению, а разностью прогрессии было число положительное.

Решение любого тригонометрического уравнения в общем виде приводит в конечном счете к одной или нескольким группам решений вида: $x_n = Pn + N$, т. е. к формуле для любого члена бесконечной арифметической прогрессии, а потому над этой формулой можно производить указанные два преобразования.

Первое противоречие, на которое наталкиваются учащиеся при решении тригонометрических уравнений и сравнении полученных ответов с ответами задачиков, заключается в несоответствии знаков у коэффициентов при переменной величине n , а также в несовпадении значений нулевых членов.

Так, если у учащегося получилась группа решений: $x = 180^\circ n - 150^\circ$, а в ответе стоит: $x = 180^\circ n + 30^\circ$, то он склонен думать, что эти два ответа не тождественны. Точно так же приводит в тупик и такое расхождение в ответах: ответ у учащегося: $x = -360^\circ n + 60^\circ$; ответ в задачнике: $x = 360^\circ n + 60^\circ$.

§ 3. Замена одного ряда чисел несколькими, а также обратная замена нескольких рядов чисел одним

Теорема. Если m последовательных членов бесконечной прогрессии

$$x_n = Pn + N, \quad (1)$$

например

$$N, N + P, N + 2P, \dots, N + (m - 1)P,$$

сделать центральными членами m прогрессий с одинаковой разностью, равной Pm :

$$\left. \begin{aligned} x_n^I &= Pmn + N, \\ x_n^{II} &= Pmn + (N + P), \\ x_n^{III} &= Pmn + (N + 2P), \\ &\dots \\ x_n^{(m)} &= Pmn + [N + (m - 1)P], \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

то прогрессия (1) и ряд прогрессий (2) выражают собой одни и те же числа. Будем давать в ряде прогрессий (2) числу n частные значения, начиная с нуля. При $n = 0$ получим:

$$x_0^I = N; x_0^{II} = N + P; x_0^{III} = N + 2P; \dots; x_0^{(m)} = N + (m - 1)P,$$

т. е. m последовательных членов прогрессии (1), начиная с центрального члена N .

При $n = 1$ получим:

$$\begin{aligned} x_1^I &= N + Pm; & x_1^{II} &= N + P + Pm = N + (m + 1)P; \\ x_1^{III} &= N + (m + 2)P; & \dots; & x_1^{(m)} = N + (m - 1)P + Pm = N + (2m - 1)P, \end{aligned}$$

т. е. следующие m последовательных членов прогрессии (1), так как

$$x_1^I - x_0^{(m)} = P.$$

Докажем, что при переходе от $n = k$ к $n = k + 1$ получим $2m$ членов прогрессии (1). Достаточно доказать, что $x_{k+1}^I - x_k^{(m)} = P$.

В самом деле:

$$\begin{aligned} x_{k+1}^I &= N + Pm(k + 1), \\ x_k^{(m)} &= N + P(m - 1) + Pmk, \end{aligned}$$

откуда

$$x_{k+1}^I - x_k^{(m)} = Pmk + Pm - Pm + P - Pmk = P,$$

что и требовалось доказать.

Эта теорема дает следующие два важных следствия:

1. Любая бесконечная прогрессия может быть заменена любым числом m рядов бесконечных прогрессий с одной и той же разностью,

Наиболее часто встречающиеся случаи возможного объединения групп:

1. $\left. \begin{array}{l} 4n+1 \\ 4n-1 \end{array} \right\}$ объединяются в одну группу: $2n+1$, так как

$$1 - (-1) = 2 = \frac{M}{m} = \frac{4}{2}.$$

Некоторые задачки избегают давать объединенные ответы. В особенности много необъединенных ответов по указанному 1-му случаю встречается в «Общем сборнике задач и упражнений по всем отделам математики» под редакцией Г. Е. Попперек.

В этом сборнике не объединяются даже такие группы решений:

$$2n+1, \quad 2n-1.$$

Каждая из этих групп представляет собой форму нечетного числа а потому обе группы можно заменить одной:

$$2n+1.$$

На основании п. 1 § 2

2. $\left. \begin{array}{l} 8k+1 \\ 8k+5 \end{array} \right\}$ объединяются в одну группу: $4k+1$, так как

$$5-1 = \frac{M}{m} = \frac{8}{2} = 4.$$

3. $\left. \begin{array}{l} 12n+3 \\ 12n+7 \\ 12n+11 \end{array} \right\}$ объединяются в одну группу: $4n+3$, так как

$$7-3 = 11-7 = \frac{M}{m} = \frac{12}{3} = 4.$$

4. $\left. \begin{array}{l} 8k+1 \\ 8k+3 \\ 8k+5 \\ 8k+7 \end{array} \right\}$ объединяются в одну группу: $2n+1$, так как

$$3-1 = 5-3 = 7-5 = \frac{M}{m} = \frac{8}{4} = 2.$$

5. Четыре группы, написанные в двух формах:

- $\left. \begin{array}{l} 6n \pm 1 \\ 6n \pm 2 \end{array} \right\}$ объединяются в две группы, записывающиеся в одной форме $3n \pm 1$, так как

$$\left. \begin{array}{l} 6n-1 \\ 6n+2 \end{array} \right\} 3n-1 \quad \left. \begin{array}{l} 6n+1 \\ 6n-2 \end{array} \right\} 3n+1 \quad \left. \begin{array}{l} 3n-1 \\ 3n+1 \end{array} \right\} 3n \pm 1.$$

6. $\left. \begin{array}{l} 6n+3 \\ 6n \pm 1 \end{array} \right\}$ объединяются в одну группу: $2n+1$, так как

$$6n-1 = 6n+5 \quad \text{и} \quad 3-1 = 5-3 = \frac{M}{m} = \frac{6}{3} = 2.$$

$$7. \left. \begin{array}{l} 4k = 4k \\ 8k + 2 \\ 8k + 6 \end{array} \right\} 4k + 2 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 4k = 4k \\ 8k + 2 \\ 8k + 6 \end{array}} \right\} 2k.$$

§ 4. Преобразование групп, имеющих общие решения, в группы, общих решений не имеющие

Первое следствие § 3 позволяет разрешать третье противоречие, на которое приходится наталкиваться при сравнении своих ответов с ответами задачников. Это противоречие имеет место потому, что найденные группы решений тригонометрического уравнения иногда содержат общие корни, тогда как в ответах должны даваться (и обычно даются) такие группы решений, которые общих корней не содержат. Этот случай возможен тогда, когда группы решений имеют различные периоды (разности прогрессий).

Для исключения общих решений данные группы разлагают на группы с общим периодом, а затем стремятся объединить получившиеся группы, исключив повторяющиеся.

Примеры

1.

$$x_n^I = 120^\circ n + 60^\circ, \quad x_n^{II} = 180^\circ n.$$

Эти две группы имеют общие решения при $n = 1, 4, 7$ и т. д.

Для исключения общих решений находим общее наименьшее кратное для периодов 120° и 180° . Общее наименьшее кратное равно 360° .

Тогда 1-я группа распадается на три:

$$x_n^I = 360^\circ n + 60^\circ, \quad x_n^{II} = 360^\circ n + 180^\circ, \quad x_n^{III} = 360^\circ n + 300^\circ.$$

2-я группа распадается на две:

$$x_n^{IV} = 360^\circ n, \quad x_n^V = 360^\circ n + 180^\circ.$$

Получается пять новых групп, из которых 5-я, совпадая со 2-й, исключается. Объединяя обратно первые три группы в одну, получим окончательно две группы решений, не имеющих общих корней:

$$x_n^I = 120^\circ n + 60^\circ, \quad x_n^{II} = 360^\circ n.$$

2.

$$x_n^I = 2n, \quad x_n^{II} = 3n + 2, \quad x_n^{III} = 6n + 1, \quad x_n^{IV} = 6n + 3, \quad x_n^V = 8n + 1.$$

Приведем первые четыре группы к общему периоду 6. 1-я и 2-я группы распадаются на следующие пять групп:

$$x_n^I = 6n, \quad x_n^{II} = 6n + 2, \quad x_n^{III} = 6n + 4, \quad x_n^{IV} = 6n + 2, \quad x_n^V = 6n + 5.$$

Принимая во внимание 3-ю и 4-ю из данных групп, видим, что все эти группы могут быть заменены одной:

$$x_n = n.$$

5-я группа $x_n^V = 8n + 1$ новых чисел не дает, а потому исключается.

Итак, окончательно имеем только одну группу решений:

$$x_n = n.$$

3.

$$x_n^{I, II} = 2n + (-1)^n.$$

Здесь мы имеем две группы решений соответственно четному и нечетному n . Полагая $n = 2k$, получим:

$$x_k^I = 4k + 1.$$

Полагая $n = 2k + 1$, получим:

$$x_k^{II} = 4k + 1.$$

Таким образом две группы объединяются в одну:

$$x_n = 4n + 1.$$

4.

$$x_n^I = 3n, \quad x_n^{II, III} = 6n \pm 1.$$

Приведя группы к общему периоду 6, получим:

$$x_n^I = 6n; \quad x_n^{II} = 6n + 3; \quad x_n^{III} = 6n + 1; \quad x_n^{IV} = 6n - 1 = 6n + 5.$$

Три последних группы объединяются в одну:

$$x_n^{II} = 2n + 1.$$

Таким образом окончательно получим две группы решений:

$$x_n^I = 6n; \quad x_n^{II} = 2n + 1.$$

Этот пример представляет собой простое преобразование групп, без исключения общих решений.

5. Аналогичен и следующий пример:

$$x_n^I = 4n; \quad x_n^{II} = 2n + 1; \quad x_n^{III} = 4n + 2.$$

1-я и 3-я группы могут быть объединены со 2-й в одну окончательную.

$$x_n = n.$$

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА И РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙКИ И ЦИРКУЛЯ

Л. И. К р е е р (г. Орджоникидзе)

1. С глубокой древности известны многочисленные попытки выполнить с помощью циркуля и линейки следующие построения: 1) удвоение куба; 2) трисекция угла; 3) построение семиугольника; 4) квадратура круга.

Первая из этих задач сводится к решению уравнения

$$x^3 = 2a^3.$$

Вторая сводится к решению уравнения

$$4x^3 - 3x = a,$$

если через a обозначить косинус данного угла, через x косинус $1/3$ данного угла.

Третью задачу мы рассмотрим в конце этой статьи.

Четвертая задача сводится к решению уравнения

$$x^2 = \pi r^2$$

и равносильна задаче о построении прямолинейного отрезка, равного π . Этой задаче мы касаться не будем. Решение первой, второй и третьей задач сводится к построению с помощью циркуля и линейки корней кубического уравнения.

2. Основными элементами любого построения с помощью циркуля и линейки являются следующие:

- 1) Проведение прямой через две данные точки.
- 2) Нахождение точки пересечения двух прямых.
- 3) Проведение параллельных и перпендикулярных прямых.
- 4) Проведение окружности через три данные точки.
- 5) Нахождение точки пересечения окружности с прямой (засечка).
- 6) Нахождение точки пересечения двух окружностей (засечка).

В переводе на алгебраический язык аналитической геометрии получаем:

- 1) и 3) Составить уравнение первой степени.
- 2) Решить два уравнения первой степени с двумя неизвестными.

4) Решить систему трех квадратных уравнений с тремя неизвестными:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R^2,$$

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = R^2,$$

$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 = R^2,$$

где (x, y) — координаты центра и R — радиус окружности; (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , (a_3, b_3) — координаты данных точек.

Вычитая почленно из первого уравнения второе, из второго третье, получим систему двух уравнений, линейных относительно x и y ; решив ее, найдем координаты центра x, y ; затем с помощью одного из предыдущих трех уравнений найдем радиус окружности

$$R = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2}.$$

Нахождение R потребует от нас извлечения квадратного корня.

5) Решить систему уравнений:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R_1^2,$$

$$mx + ny = p.$$

Очевидно, координаты точек пересечения выразятся, вообще говоря, через квадратные корни, как корни квадратного уравнения.

6) Решить систему уравнений:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R_1^2;$$

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = R_2^2.$$

Посредством почленного вычитания одного уравнения из другого мы сведем эту систему к предыдущему случаю.

Желая сначала выяснить лишь достаточность некоторого признака возможности построения с помощью циркуля и линейки, следует поставить вопрос, всегда ли возможно построить циркулем и линейкой корни уравнений первой и второй степени. Из элементов геометрии известно, что всегда возможно построить всякую рациональную функцию отрезков циркулем и линейкой (употребление четвертой пропорциональной), а также квадратного корня из отрезка (средняя пропорциональная); следовательно, возможно построение и корней квадратного уравнения с рациональными коэффициентами. Таким образом, мы приходим к заключению:

если геометрическая задача сводится к решению уравнения n -й или второй степени, то построение всегда выполнимо с помощью линейки и циркуля.

Заметим еще, что мы можем точно так же строить корни 4-й, 8-й и так далее, вообще 2^n -й степени, а следовательно, строить корни уравнения вида:

$$x^m + px^{\frac{m}{2}} + q = 0,$$

где $m = 2^n$. Действительно, построение, например, $\sqrt[m]{a}$ можно разбить на следующие:

$$\sqrt[m]{a} = b; \quad \sqrt[4]{a} = \sqrt{b} = c; \quad \sqrt[8]{a} = \sqrt[4]{b} = \sqrt{c}.$$

Так как всегда возможно с помощью циркуля и линейки выполнение таких операций, как проведение конечного числа прямых и окружностей, то можно считать доказанной достаточность такого признака: *если геометрическая задача может быть сведена к решению конечной цепи уравнений первой и второй степени, то построение циркулем и линейкой возможно.*

Здесь следует особенно подчеркнуть конечность цепи операций. Так, в случае трисекции угла:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$$

и, следовательно, разделив данный угол пополам, отняв от половины четверть, прибавив одну восьмую и т. д., мы в результате такого бесконечного процесса разделим угол на три равные части. Но, очевидно, весь этот процесс не может быть осуществлен геометрически с помощью циркуля и линейки, так как число операций, которое в действительности может быть осуществлено, всегда конечно.

3. Верно ли противоположное утверждение: «если задача не сводится к конечной цепи уравнений первой и второй степени, то построение циркулем и линейкой невозможно».

Во-первых, отметим сейчас же, что существуют такие уравнения выше второй степени, корни которых можно построить.

Например, кубическое уравнение, имеющее хоть один рациональный корень, уравнение четвертой степени, если его левая часть может быть разложена на произведение двух трехчленов второй степени с рациональными коэффициентами; вообще уравнение n -й степени, если его левая часть разложима на множители первой и второй степени с рациональными коэффициентами. В этом случае мы будем говорить, что уравнение приводимо к линейным и квадратным уравнениям; в противном случае мы условимся называть уравнение неприводимым. Теперь предположим, что мы можем построить линейкой и циркулем корни кубического уравнения. Так как всякое построение указанными инструментами состоит только из таких манипуляций, которым на алгебраическом языке соответствует решение уравнений первой и второй степени, то построение корней неприводимого кубического уравнения удастся тогда и только тогда, если можно свести решение этого уравнения к решению конечной цепи уравнений первой и второй степени; иными словами, если его корни выражаются конечной цепью квадратных радикалов.

Таким образом необходимый и достаточный признак возможности построения с помощью циркуля и линейки заключается в том, что задача приводится к решению такого уравнения, корни которого могут быть выражены конечной цепью квадратных радикалов.

4. Казалось бы, что теперь вопрос о невозможности построения с помощью циркуля и линейки ребра удвоенного куба разрешается сейчас же. Ведь $x = a\sqrt[3]{2}$ выражается через кубический корень, а не через квадратный. Однако такое заключение было бы весьма поспешным. Заранее нельзя считать очевидным, что не может существовать такой комбинации конечного числа рациональных алгебраических действий и извлечений квадратных корней, чтобы в результате получилось точно $\sqrt[3]{2}$. Это, как мы увидим ниже, действительно невозможно, но это отнюдь не очевидно. Для решения нашей проблемы необходимо несколько глубже проникнуть в мир чисел.

5. Совокупность чисел, обладающая тем свойством, что результат каждого арифметического действия (кроме деления на нуль) есть число той же совокупности, называется числовым корпусом. Простейшим примером такой совокупности является множество всех рациональных чисел — корпус рациональных чисел: ни одно арифметическое действие (деление на нуль, по условию, исключено) не выводит нас из области рациональных чисел; иначе говоря, все арифметические действия над числами этой области выполнимы в той же области. Как известно, действие извлечения корня не всегда выполнимо в области рациональных чисел. Так, например, $\sqrt{2}$ не может быть выражен никаким рациональным числом: извлечение квадратного корня из 2 выводит нас из области рациональных чисел. Приобщая новые числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и т. д. к числам рациональным, мы образуем числовые области более обширные, чем область рациональных чисел, — области, которые обладают характерным признаком числового корпуса. Станем, например, образовывать числа вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b — числа рациональные. Легко убедиться, что результат всякого арифметического действия над числами этого вида есть числа того же вида. Следовательно, совокупность всех чисел вида $a + b\sqrt{2}$ есть числовой корпус, причем корпус рациональных чисел есть часть (или делитель, как принято говорить) нового корпуса, ибо при $b = 0$ получим числа рациональные. Новый корпус будем обозначать символом $K(\sqrt{2})$. Важно отметить сейчас же, что приобщение какого-либо числа $p + q\sqrt{2}$, где p и q — рациональные числа, дает ту же совокупность чисел, какую дает приобщение $\sqrt{2}$.

Рассмотрим теперь алгебраическое уравнение n -й степени с рациональными коэффициентами:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0. \quad (1)$$

Очевидно, без ограничения общности можно считать все коэффициенты целыми числами. Такое уравнение называется уравнением в корпусе рациональных чисел. Число называется алгебраическим, если оно является корнем уравнения (1). Если x_1 есть корень такого уравнения, то числа вида $a + bx_1$ составляют корпус, называемый

алгебраическим. Примером такого корпуса может служить корпус $K(\sqrt{2})$, ибо числа этого корпуса могут быть получены приобщением корня алгебраического уравнения $x^2 = 2$ к корпусу рациональных чисел, или, общее, корня уравнения $x^2 - 2px + (p^2 - 2q^2) = 0$.

Приобщая новую иррациональность к этому корпусу, можно образовать более обширный корпус, который содержит корпус $K(\sqrt{2})$ как составную часть (делитель). Для этого достаточно приобщить, например, квадратный корень из такого числа, которое не является квадратом ни рационального числа, ни числа вида $a + b\sqrt{2}$. Например, бесполезно было бы приобщать $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}}$, ибо $27 + 10\sqrt{2} = (5 + \sqrt{2})^2$. Но мы знаем из предыдущего, что корпус $K(5 + \sqrt{2})$ тождественен корпусу $K(\sqrt{2})$. Следовательно, приобщение этого числа не расширило корпус $K(\sqrt{2})$.

Если же возьмем, например, $\sqrt{3}$ и образуем числа вида $a_1 + b_1\sqrt{3}$, где a_1 и b_1 в свою очередь числа вида $a + b\sqrt{2}$, то, отделяя в результате каждого действия часть, не содержащую $\sqrt{3}$, от части, содержащей $\sqrt{3}$, будем получать числа вида $a_1 + b_1\sqrt{3}$ или, в иной записи, числа вида $(m + n\sqrt{2}) + (p + q\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3}$, где m , n , p и q — рациональные числа. Очевидно, корпус рациональных чисел и корпус $K(\sqrt{2})$ составляют части нового корпуса, являются его делителями; именно при $n = q = p = 0$ получаем корпус рациональных чисел; при $p = q = 0$ получаем корпус $K(\sqrt{2})$. Легко убедиться, что последовательность, в которой делаются приобщения $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, роли не играет в образовании корпуса $K(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Приобщая последовательно $\sqrt{N_1}, \sqrt{N_2}, \sqrt{N_3}, \dots$, соблюдая условие, чтобы каждое из этих N_i не было квадратом чисел предшествующих корпусов, можно установить некоторую бесконечную последовательность корпусов, из которых каждый последующий содержит все предшествующие своими составными частями.

Очевидно, число корпуса $K(\sqrt{N_1}, \sqrt{N_2}, \dots, \sqrt{N_i})$ содержит не больше i иррациональностей; иногда оно может содержать их и меньше.

Конечно, для образования новых корпусов можно брать не только квадратные корни из целых чисел, но также и корни любых других степеней, но рассмотрение этого не входит в нашу задачу ¹⁾.

В § 3 было дано понятие о приводимости и неприводимости уравнения, связанное с возможностью или невозможностью разложить левую часть уравнения на множители более низких степеней. Сколько-нибудь достаточное освещение этого вопроса не может быть здесь дано. Заметим только, что уравнение, неприводимое в одной области чисел

¹⁾ Приобщение квадратных корней из рациональных дробей ничего нового не вносит. Ведь $a + b\sqrt{\frac{m}{n}} = a + \frac{b}{n}\sqrt{mn}$; следовательно, приобщение $\sqrt{\frac{m}{n}}$ равносильно приобщению \sqrt{mn} , т. е. квадратного корня из целого числа.

(Прим. ред.)

(корпус), может быть приводимо в некоторой другой, более обширной области. Так, уравнение $x^2 - 10x + 23 = 0$ неприводимо в области рациональных чисел, но приводимо в корпусе $K(\sqrt{2})$, потому что

$$x^2 - 10x + 23 = (x - 5 - \sqrt{2})(x - 5 + \sqrt{2}).$$

Уравнение $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ неприводимо ни в корпусе рациональных чисел, ни в корпусе $K(\sqrt{2})$, но приводимо в корпусе $K(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, потому что

$$x^4 - 10x^2 + 1 = (x^2 - 5 + 2\sqrt{2}\sqrt{3})(x^2 - 5 - 2\sqrt{2}\sqrt{3}).$$

6. В § 3 мы видели, что вопрос о решении построением с помощью циркуля и линейки задачи об удвоении куба сводится к вопросу о возможности выразить конечной цепью квадратных радикалов из рациональных чисел корень такого кубического уравнения, которое не имеет ни одного рационального корня. Докажем теперь теорему:

Т е о р е м а. Если кубическое уравнение

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

не имеет ни одного рационального корня, то его корни не могут быть выражены конечной цепью квадратных радикалов (a_1, a_2, a_3 — рациональные числа).

Достаточно рассмотреть уравнение

$$x^3 + px + q = 0, \quad (2)$$

где p, q — рациональные числа, так как всякое кубическое уравнение предыдущего вида может быть приведено к этому виду ¹⁾.

Если обозначим корни уравнения (2) через x_1, x_2, x_3 , то имеем:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \quad (3)$$

Допустим теперь, что теорема неверна: пусть, например, x_1 может быть выражен в квадратных радикалах; тогда, согласно § 5, он принадлежит некоторому алгебраическому корпусу

$$K_m(\sqrt{N_1}, \sqrt{N_2}, \dots, \sqrt{N_m}),$$

и мы имеем:

$$x_1 = u + v\sqrt{N_m}, \quad (4)$$

причем u и v содержат не более $(m-1)$ иррациональностей и N_m не есть квадрат числа корпуса K_{m-1} .

Из (2) и (4) имеем:

$$(u + v\sqrt{N_m})^3 + p(u + v\sqrt{N_m}) + q = 0$$

или

$$(u^3 + 3uv^2N_m + pu + q) + 3(u^2v + v^3N_m + pv)\sqrt{N_m} = 0. \quad (5)$$

¹⁾ Уравнение третьей степени общего вида приводится к уравнению вида (2) подстановкой $x = y - \frac{a_1}{3}$. (Прим. ред.).

Обозначим выражения, заключенные в скобках, через U , V ; последние, очевидно, также содержат не более $(m-1)$ иррациональностей. Уравнение (5) принимает вид:

$$U + V \sqrt{N_m} = 0. \quad (6)$$

Но $\sqrt{N_m}$ не принадлежит к числу тех иррациональностей, которые содержатся в U и V , поэтому из (6) следует:

$$U = 0, \quad V = 0, \quad (7)$$

ибо в противном случае мы имели бы:

$$\sqrt{N_m} = -U : V,$$

т. е. $\sqrt{N_m}$ выразился бы через те же иррациональности, как U и V . Теперь видно, что

$$x_2 = u - v \sqrt{N_m}$$

также удовлетворяет уравнению (2). Действительно, при подстановке в уравнение (2) этого выражения вместо x , многочлен, стоящий в первой скобке в уравнении (5), сохраняет свою величину и знак, так как v входит туда лишь во второй степени; многочлен, стоящий во второй скобке, при этом сохраняет свою абсолютную величину, но изменяет свой знак на обратный, так как v входит в него в нечетных степенях. Поэтому результатом подстановки будет $U - V \sqrt{N_m}$; в силу же (7) будем также иметь:

$$U - V \sqrt{N_m} = 0,$$

откуда и следует что

$$x_2 = u - v \sqrt{N_m}$$

есть также корень уравнения (2).

Но из уравнения (3) имеем:

$$x_3 = -(x_1 + x_2) = -2u. \quad (8)$$

Равенство (8) показывает, что x_3 принадлежит к корпусу K_{m-1} , к которому принадлежало u . По условию теоремы корень x_3 не может быть рациональным числом; значит, он должен принадлежать к корпусу K_{m-1} , содержащему не более $(m-1)$ иррациональностей.

Пусть число этих иррациональностей i ; $1 < i \leq m-1$.

Представив x_3 в виде

$$x_3 = w + s \sqrt{N_i}, \quad (9)$$

где w и s принадлежат к корпусу чисел, содержащему менее i иррациональностей, и повторив те же рассуждения, исходя от корня x_3 , как выше от x_1 , мы получим, что корень x_1 выражается либо так:

$$x_1' = w - s \sqrt{N_i},$$

либо так:

$$x_1'' = -2w.$$

Получается противоречие: согласно допущению x_1 принадлежит корпусу K_m и не принадлежит к K_{m-1} . Это противоречие и доказывает теорему: *кубическое уравнение, неприводимое в корпусе рациональных чисел, не может иметь корней, выражаемых конечной цепью квадратных корней.*

7. Теперь мы можем перейти к тем задачам, о которых говорилось в § 1.

1. Удвоение куба. Так как соответствующее задаче уравнение

$$x^3 - 2a^3 = 0,$$

очевидно, не имеет ни одного рационального корня, то, согласно теореме § 5 и § 3, построение циркулем и линейкой ребра удвоенного куба невозможно.

II. Трисекция углов. Согласно § 1 соответствующее уравнение есть

$$4x^3 - 3x = a. \quad (10)$$

Предварительно заметим, что неверно, как иногда думают, будто бы трисекция углов всегда невозможна. Наоборот, существует бесчисленное множество таких углов, трисекция которых при помощи циркуля и линейки вполне возможна; например, хотя бы такие углы:

$$180^\circ, 90^\circ, 45^\circ, 22,5^\circ.$$

Верно только то, что не всякий угол можно разделить на три равные части. В силу этого замечания вопрос должен быть поставлен так: при всяком ли рациональном значении a уравнение (10) имеет рациональный корень? Если мы сможем указать такие рациональные значения для a (т. е. косинуса данного угла), при которых уравнение (10) не имеет рациональных корней, то вопрос о трисекции угла будет решен в отрицательном смысле.

Вернемся теперь к уравнению (10) и положим $a = \frac{m}{2n}$, где m — число взаимно простое с n . Полагая

$$y = 2nx,$$

мы приведем уравнение (10) к виду:

$$y^3 - 3n^2y = mn^2. \quad (11)$$

Теперь, если уравнение (10) имеет рациональный корень, то и уравнение (11) тоже имеет рациональный корень и притом даже целый, так как коэффициент при y^3 есть 1 и все коэффициенты — целые числа. Но легко показать, что уравнение (11) не всегда имеет целый корень.

Так, например, это невозможно в том случае, когда n , делясь нацело на простое число p , не делится на его квадрат. Действительно, так как $3n^2y$ и mn^2 , очевидно, делятся на p^2 , то также и y^3 должен делиться на p^2 , но тогда y должен делиться на p . Но отсюда следует, что y^3 и $3n^2y$ делятся на p^3 ; следовательно, левая часть (11) делится

на p^3 , тогда как правая часть делится только на p^2 . Из этого видно, что уравнение (11) не всегда имеет целый корень. Очевидно, значений a вышеуказанного характера существует бесчисленное множество.

III. Семиугольник. Из элементов теории комплексных чисел известно, что вершины правильного n -угольника, вписанного в круг радиуса, равного единице, суть отображения n корней уравнения

$$x^n - 1 = 0.$$

Поэтому задача о построении правильного семиугольника сводится к задаче о построении с помощью циркуля и линейки корней уравнения

$$x^7 - 1 = 0.$$

После сокращения на $(x - 1)$ получим уравнение:

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \quad (12)$$

—возвратное уравнение первого рода. Поэтому подстановка

$$y = x + \frac{1}{x}$$

приводит уравнение (12) к кубическому уравнению:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0. \quad (13)$$

Докажем, что уравнение (13) не имеет рационального корня. Допустим обратное: пусть корень уравнения $y_1 = \frac{m}{n}$ есть рациональное число. Без ограничения общности можно считать m и n взаимно простыми.

Подставив $y_1 = \frac{m}{n}$ в уравнение (13), получим:

$$m^3 - n^3 + m^2n - 2mn^2 = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) можно записать в следующих двух видах:

$$m^3 = n(n^2 + 2mn - m^2), \quad (A)$$

$$n^3 = m(m^2 + mn - 2n^2). \quad (B)$$

Имеем:

из (A): m должно делиться на n ,

из (B): n должно делиться на m .

Отсюда выходит, что $m = \pm n$, следовательно, $y_1 = \pm 1$. Но подстановка ± 1 в уравнение (13) обнаруживает, что ни $+1$, ни -1 уравнению (13) не удовлетворяют.

Следовательно, правильный семиугольник не может быть построен с помощью циркуля и линейки.

О СРАВНИТЕЛЬНОЙ СИЛЕ ПРОСТЕЙШИХ ПРИЗНАКОВ
СХОДИМОСТИ РЯДОВ

А. В. Грошев (Москва)

В имеющихся на русском языке и распространенных в настоящее время руководствах по анализу вопрос о сравнительной силе простейших признаков сходимости рядов или вовсе не затрагивается или затрагивается вскользь, без полного решения. Между тем этот вопрос представляет некоторый интерес для преподающего математику. Простота проблемы, несомненно, заставит всякого, поставившего ее, предпочесть самостоятельное разрешение ее поискам литературы. Но заметка на эту тему, может быть, все же будет не лишней.

Рассмотрим три простейших признака сходимости — признак Даламбера, признак Коши и логарифмический признак Коши. Относительно сравнительной силы двух первых признаков вопрос решается так: если признак Даламбера решает вопрос о сходимости данного ряда в ту или другую сторону, то этот вопрос может быть разрешен и по признаку Коши, но есть случаи, когда исследование сходимости рядов с помощью признака Коши дает определенный результат, тогда как признак Даламбера вопроса не решает.

Для доказательства этого положения возьмем сначала признаки Даламбера и Коши в той их формулировке, когда не предполагается существования пределов выражений $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ и $\sqrt[n]{u_n}$. Пусть, начиная с некоторого значения $n = m$, имеет место неравенство:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1,$$

где u_n — член знакоположительного ряда $\sum u_n$, который, таким образом, сходится. Из данного неравенства получаем:

$$u_{m+1} < k u_m; \quad u_{m+2} < k^2 u_m,$$

и вообще при $n > m$

$$u_n < k^{n-m} \cdot u_m.$$

Извлекая корень, получим:

$$\sqrt[n]{u_n} < \sqrt[n]{k^{n-m} u_m} = k \sqrt[n]{\frac{u_m}{k^m}}.$$

Так как в последней части подкоренное выражение постоянно и положительно, то при неограниченном возрастании n корень $\sqrt[n]{\frac{u_m}{k^m}}$ имеет пределом единицу, т. е. вся последняя часть имеет пределом k .

Отсюда следует, что, начиная с некоторого значения n , будем иметь неравенство:

$$\sqrt[n]{u_n} < k_1 < 1,$$

где k_1 — постоянное, которое можно сделать как угодно близким к постоянному k . Полученное неравенство и есть признак Коши. Итак, если признак сходимости Даламбера применим, то применим и признак Коши. Случай расходимости исследуется аналогично.

В качестве ряда, сходимость которого легко обнаруживается по признаку Коши и не обнаруживается по признаку Даламбера, возьмем ряд $\sum r^n |\sin n\alpha|$, где $0 < r < 1$. Признак Коши дает:

$$\sqrt[n]{u_{n+1}} = r \sqrt[n]{|\sin n\alpha|} \leq r < 1,$$

что и доказывает сходимость ряда. Применяя признак Даламбера, получаем:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r \left| \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin n\alpha} \right| = r |\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} n\alpha|.$$

Последнее выражение будет колебаться в пределах от 0 до ∞ , если только отношение $\frac{\alpha}{\pi}$ не есть рациональное число. Следовательно, признак Даламбера не решает вопроса о сходимости ряда.

Возьмем теперь признаки Даламбера и Коши в том виде, в каком они даются в элементарных курсах анализа, т. е. когда предпола-

гается существование пределов выражений $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ и $\sqrt[n]{u_n}$. Соотношение между их силой остается прежним. Первая часть теоремы доказывается аналогично предыдущему случаю. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k < 1,$$

где u_n — член знакоположительного ряда. Тогда для произвольно малого ε найдется такое значение $n = m$, начиная с которого

$$k - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < k + \varepsilon.$$

Из этих неравенств, аналогично предыдущему, получим при $n > m$:

$$u_m (k - \varepsilon)^{n-m} < u_n < u_m (k + \varepsilon)^{n-m},$$

или

$$(k - \varepsilon) \sqrt[n]{\frac{u_m}{(k - \varepsilon)^m}} < \sqrt[n]{u_n} < (k + \varepsilon) \sqrt[n]{\frac{u_m}{(k + \varepsilon)^m}}.$$

Так как подкоренные выражения в первой и последней частях постоянны и положительны, то радикалы $\sqrt[n]{\frac{u_m}{(k \pm \varepsilon)^m}}$ при $n \rightarrow \infty$ имеют пределом единицу. Отсюда следует, что $\sqrt[n]{u_n}$ при $n \rightarrow \infty$ имеет предел, равный k , так как число ε произвольно мало и границы $k - \varepsilon$ и $k + \varepsilon$ могут быть сближены как угодно тесно. Таким образом мы нашли, что предел выражения $\sqrt[n]{u_n}$ не только необходимо существует при существовании $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$, но и оказывается равным последнему.

Привожу теперь пример такого рода, в котором $\lim \sqrt[n]{u_n}$ существует, а $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ не существует. (В вышеприведенном ряде

$\sum r^n |\sin na|$ оба предела не существуют.)

Пусть

$$u_{2n} = \left(k - \frac{1}{2n}\right)^{2n}$$

и

$$u_{2n+1} = \left(k + \frac{1}{2n}\right)^{2n+1},$$

где $0 < k < 1$.

Очевидно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = k,$$

и ряд сходится.

Признак Даламбера дает следующее:

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \left(\frac{k + \frac{1}{2n}}{k - \frac{1}{2n}}\right)^{2n} \cdot \left(k + \frac{1}{2n}\right) = \left[\left(1 + \frac{\frac{1}{k} - 1}{n}\right)^n \right]^2 \cdot \left(k + \frac{1}{2n}\right).$$

Выражение, стоящее в квадратной скобке, как легко видеть, стремится при $n \rightarrow \infty$ к одному пределу с выражением $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; предел же этого выражения равен $e^{\frac{1}{k}}$.

Таким образом получаем:

$$\lim \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = ke^{\frac{2}{k}}.$$

В то же время

$$\begin{aligned}\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} &= \left[\frac{k - \frac{1}{2n}}{k + \frac{1}{2(n-1)}} \right]^{2n} \left[k + \frac{1}{2(n-1)} \right] = \\ &= \left[\frac{k - \frac{1}{2n}}{k + \frac{1}{2n}} \right]^{2n} \cdot \left[\frac{k + \frac{1}{2n}}{k + \frac{1}{2(n-1)}} \right]^{2n} \cdot \left[k + \frac{1}{2(n-1)} \right].\end{aligned}$$

Первый множитель последнего выражения, очевидно, имеет предел, равный $e^{-\frac{2}{k}}$, так как он есть обратная величина выражения $\left[\frac{k + \frac{1}{2n}}{k - \frac{1}{2n}} \right]^{2n}$, предел которого, как только что было показано, равен $e^{\frac{2}{k}}$.

Таким же образом покажем, что второй множитель имеет пределом единицу. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} = k e^{-\frac{2}{k}}.$$

Сопоставляя полученные результаты, видим, что отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ колеблется в конце концов между $k e^{\frac{2}{k}}$ и $k e^{-\frac{2}{k}}$, т. е. предела не имеет и при надлежаще подобранном k бесконечное множество раз принимает значения, превышающие единицу. Следовательно, признак Даламбера не решает вопроса о сходимости этого ряда.

Последний пример весьма громоздок. Вероятно, можно придумать пример более изящный, но мне этого сделать не удалось.

Решив вопрос о признаке Даламбера и Коши, перейдем к сравнению признака Коши с логарифмическим признаком. Легко показать, что логарифмический признак сильнее признака Коши.

Пусть относительно знакоположительного ряда $\sum u_n$ известно, что, начиная с некоторого значения n ,

$$\sqrt[n]{u_n} < k < 1.$$

Покажем, что отсюда следует неравенство:

$$\frac{\lg \frac{1}{u_n}}{\lg n} > k_1 > 1.$$

По данному имеем:

$$u_n < k^n,$$

или

$$\frac{1}{u_n} > \frac{1}{k^n},$$

откуда

$$\lg \frac{1}{u_n} > n \lg \frac{1}{k},$$

где $\frac{1}{n} > 1$.

Следовательно,

$$\frac{\lg \frac{1}{u_n}}{\lg n} > \frac{n \lg \frac{1}{k}}{\lg n} \rightarrow \infty$$

при $n \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

Примеры рядов, сходимость которых определяется по логарифмическому признаку и не определяется по признаку Коши, общеизвестны, например:

$$\sum \frac{1}{n^a}.$$

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ ПРИЕМЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

А. С. Агамалов (Москва)

Как известно, обращением формул для дифференцирования основных элементарных функций мы получаем соответствующие формулы интегрирования. Эти последние обычно объединяются в форме таблицы, которая и является основой техники интегрирования. При этом следует отметить, что в результате обращения формул дифференцирования алгебраической суммы, произведения двух функций и функции от функции, получаются те формулы интегрирования, на которых основаны более или менее общие методы, именно: метод разложения, интегрирование по частям и интегрирование подстановкой. Они достаточно подробно разбираются в каждом курсе интегрального исчисления и потому общеизвестны. Но при вышеуказанном получении общих формул интегрирования обычно не затрагивается обращение формулы дифференцирования частного (дроби); на этом мы и хотим несколько остановить внимание читателя.

Из формулы:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

или, в дифференциалах

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2},$$

где u и v — функции одного и того же переменного, получаем, расчленив предварительно правую часть на две дроби и интегрируя:

$$\frac{u}{v} = \int \frac{du}{v} - \int \frac{u dv}{v^2},$$

откуда

$$\int \frac{u dv}{v^2} = -\frac{u}{v} + \int \frac{du}{v}. \quad (\alpha)$$

Мы можем теперь сделать следующее сопоставление.

Общие формулы дифференцирования	Соответствующие формулы интегрирования
I. $d(u+v-w)=du+dv-dw$	I. $\int (du + dv - dw) =$ $= \int du + \int dv - \int dw$
II. $d(uv)=v du + u dv$	II. $\int u dv = uv - \int v du$
III. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v du - u dv}{v^2}$	III. $\int \frac{u dv}{v^2} = -\frac{u}{v} + \int \frac{du}{v}$
IV. $d\left[\underbrace{\varphi(t)}_u\right]=f'\left[\underbrace{\varphi(t)}_u\right] \cdot \underbrace{\varphi'(t)}_{du} dt$	IV. $\int f'(u) du = \int f'[\varphi(t)] \times$ $\times \varphi'(t) dt = \int F(t) dt$

Как мы уже указывали, формула первая правой колонки является основанием метода интегрирования через разложение; на второй формуле той же колонки базируется метод интегрирования по частям; наконец, четвертая доставляет метод подстановки, наиболее сильный из всех методов; это, конечно, весьма просто объясняется тем обстоятельством, что и соответствующая формула дифференцирования играет исключительную роль, так как дифференцировать большей частью приходится функции от функций. Вполне законно поэтому рассмотреть, что может дать третья формула правой колонки. Очевидно, что последняя формула будет более удобной, чем обычная формула интегрирования по частям, в тех случаях, когда подинтегральная функция своей структурой указывает на то, что она получена от дифференцирования дроби. В некоторых других случаях, когда подинтегральная функция непосредственно приводится к виду $\frac{u}{v^2}$, она также оказывается полезной. Преимущество ее в этих случаях перед формулой интегрирования по частям заключается в замене промежуточного интегрирования дифференцированием, что, несомненно, проще и притом часто оказывается несложным по существу ¹⁾. Естественно поэтому прием, который может быть основан на этой формуле, назвать «интегрированием посредством предварительного дифференцирования». Применение ее довольно просто, так как сразу видно, какую функцию

¹⁾ Не следует противопоставлять излагаемый здесь способ интегрирования способу интегрирования по частям, так как этот способ есть частный случай интегрирования по частям. Чтобы убедиться в этом, достаточно положить $u_1 = u$, $v_1 = \frac{dv}{v^2}$.

Все же выделение этого случая очень полезно. (Прим. ред.)

следует принять за v , между тем как удачный выбор множителей u и dv при употреблении формулы интегрирования по частям имеет большое значение. Следует также отметить, что эта формула дает возможность для функций соответствующего типа не только привести интеграл к более простому, но иногда даже получить результат «автоматически» так, что применением ее достигается некоторая механизация вычисления интеграла. Для иллюстрации вышесказанного переходим к примерам.

Пример 1. Возьмем

$$\int \frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2} dx.$$

Полагаем $v = x \ln x$, тогда $dv = (1 + \ln x) dx$, следовательно, имеем:

$$1 + \ln x = u(1 + \ln x),$$

откуда $u = 1$, а поэтому $du = 0$. Таким образом сразу получаем:

$$\int \frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2} dx = -\frac{1}{x \ln x} + C.$$

Пример 2.

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx.$$

Полагаем $v = 1 + x$, тогда $dv = dx$; следовательно, $xe^x = u$, $du = e^x(1+x) dx$. Имеем:

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx = -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{e^x(1+x)}{1+x} dx = -\frac{xe^x}{1+x} + e^x + C = \frac{e^x}{1+x} + C.$$

Пример 3.

$$\int \frac{2 \sin x + 1}{(2 + \sin x)^2} dx.$$

Полагаем $v = 2 + \sin x$, тогда $dv = \cos x dx$; следовательно, $2 \sin x + 1 = u \cdot \cos x$, отсюда

$$u = \frac{2 \sin x + 1}{\cos x}$$

и

$$du = \frac{2 \cos x \cdot \cos x + \sin x (2 \sin x + 1)}{\cos^2 x} dx = \frac{2 + \sin x}{\cos^2 x} dx.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \sin x + 1}{(2 + \sin x)^2} dx &= -\frac{2 \sin x + 1}{\cos(2 + \sin x)} + \int \frac{(2 + \sin x) dx}{\cos^2 x (2 + \sin x)} = \\ &= -\frac{2 \sin x + 1}{\cos(2 + \sin x)} + \operatorname{tg} x + C = -\frac{\cos x}{2 + \sin x} + C. \end{aligned}$$

Пример 4.

$$\int x \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \frac{x \cos^2 x}{\sin^2 x} dx.$$

Положим теперь $v = \sin x$, тогда $dv = \cos x dx$, следовательно, $u = x \cos x$ и $du = \cos x - x \sin x$.

$$\int x \operatorname{ctg} x dx = -\frac{x \cos x}{\sin x} + \int \frac{\cos x - x \sin x}{\sin x} dx = -\frac{x \cos x}{\sin x} + \ln \sin x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Пример 5.

$$\int \frac{x^3 dx}{(1+x^4)^2}.$$

Положим $v = 1 + x^4$, тогда $dv = 4x^3 dx$, следовательно, $x^3 = v - 4x^3$, откуда $u = \frac{x^4}{4}$ и $du = x^3 dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{(1+x^4)^2} &= -\frac{x^4}{4(1+x^4)} + \int \frac{x^3 dx}{1+x^4} = -\frac{x^4}{4(1+x^4)} + \\ &+ \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + C. \end{aligned}$$

Многие другие интегралы аналогичного типа могут быть взяты указанным приемом.

ФОРМУЛА СТИРЛИНГА

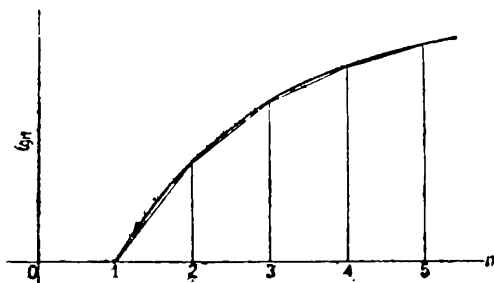
Л. А. Люстерник (Москва)

Требуется вывести асимптотическую формулу:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n},$$

или

$$\lim \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1.$$



Фиг. 1.

Заметим, что

$$\ln n! = \sum_{i=1}^n \ln i. \quad (1)$$

Рассмотрим кривую (фиг. 1)

$$y = \ln x \quad (2)$$

Интеграл

$$I = \int_1^n \ln x dx$$

равен площади фигуры, ограниченной осью OX , кривой (2) и ординатой $x = n$. Заменяв кривую вписанным многоугольником, вершины которого имеют целочисленные абсциссы, $i = 1, 2, \dots, n$, мы уменьшим

рассматриваемую площадь; после этой замены площадь фигуры может быть определена как сумма площадей трапеции и будет равна

$$I_1 = \sum_2^n \ln n - \frac{1}{2} \ln n.$$

Следовательно,

$$\int_1^n \ln x dx > \sum_2^n \ln n - \frac{1}{2} \ln n,$$

или

$$I = \sum_2^n \ln n - \frac{1}{2} \ln n + \epsilon_n, \quad (3)$$

где ϵ_n есть сумма узких сегментов, лежащих между звеньями многоугольника и кривой.

Рассмотрим теперь систему трапеций, каждая из которых образована осью OX , двумя ординатами $i - \frac{1}{2}$, $i + \frac{1}{2}$

и касательной, проведенной в

точке с абсциссой i (здесь $i = 2, 3, \dots, n-1$) (фиг. 2). Площадь такой трапеции равна $\ln i$. Сумма площадей этих трапеций равна

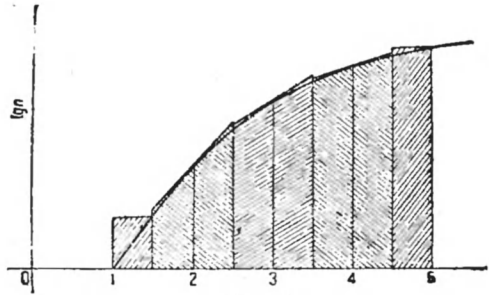
$$\sum_2^{n-1} \ln i.$$

Добавим к этим трапециям прямоугольник A с основанием $\frac{1}{2}$ (лежащим на оси OX между точками с абсциссами 1 и $1\frac{1}{2}$) и высотой $\ln \frac{3}{2}$ и прямоугольник B с основанием $\frac{1}{2}$ (лежащим на оси OX между точками с абсциссами $n - \frac{1}{2}$ и n) и высотой $\ln n$. Сумма площадей рассматриваемых трапеций и прямоугольников будет равна

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_2^{n-1} \ln i + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln n = \\ &= \sum_2^n \ln i - \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Теперь имеем:

$$I_2 > I > I_1.$$



Фиг. 2.

Сравнивая (3) и (4), получаем:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} > \varepsilon_n.$$

Если n неограниченно возрастают, числа ε_n образуют возрастающую последовательность, ограниченную сверху; следовательно, числа ε_n стремятся к некоторому пределу ε :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \varepsilon < \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

Таким образом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_1^n \ln x dx - \sum_2^n \ln n + \frac{1}{2} \ln n \right\} = \varepsilon, \quad (5)$$

где ε — некоторое положительное число, меньшее единицы.

Интегрируя по частям, найдем:

$$\int_1^n \ln x dx = \left[x \ln x - \int_1^n dx \right] = n \ln n - n + 1,$$

или в силу (5):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(n \ln n + \frac{1}{2} \ln n - n \right) - \sum_2^n \ln n \right\} = \varepsilon - 1.$$

Потенцируя, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{n + \frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} \right) = e^{\varepsilon - 1} = C.$$

Остается найти постоянную C .

При весьма большом n левую часть предыдущего равенства можно считать приблизительно равной C :

$$\frac{n^{n + \frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} \approx C. \quad (6)$$

Точно так же

$$\frac{(2n)^{2n + \frac{1}{2}} e^{-2n}}{(2n)!} \approx C. \quad (7)$$

Формула Валлиса дает нам ¹⁾:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}}.$$

Отсюда

$$(2n)! \approx \frac{2^{2n} (n!)^2}{\sqrt{\pi n}}.$$

Внося это в (7), получаем:

$$\frac{n^{2n+1} e^{-2n} \sqrt{2\pi}}{(n!)^2} \approx C. \quad (8)$$

Далее, из (6) имеем:

$$n! \approx \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{C}.$$

Внося это выражение в (8), имеем:

$$C^2 \sqrt{2\pi} \approx C,$$

или

$$\frac{1}{C} \approx \sqrt{2\pi}.$$

Подставив это значение в (6), получаем:

$$n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

¹⁾ Формула Валлиса

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}$$

можно преобразовать так: умножая числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на $(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n)^2$, получим:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n)^4}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n)^2 \cdot (2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} \cdot (n!)^4}{[(2n)!]^2 \cdot (2n+1)},$$

или

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{[(2n)!]^2} \cdot \frac{2}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{[(2n)!]^2} \cdot \frac{1}{n};$$

отсюда

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}}.$$

(Прим. ред.)

Т Е К У Щ А Я Ж И З Н Ь

ПОСТАНОВЛЕНИЯ ВТОРОГО ВСЕСОЮЗНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЪЕЗДА

(В следующем сборнике будет дана статья, посвященная работе съезда)

Бурный рост нашей страны в техническом и культурном отношении, успешно выполняющей под руководством Всесоюзной коммунистической партии и ее вождя т. Сталина план великих работ, имеющих своей задачей построение бесклассового социалистического общества, нашел свое яркое отражение в нынешнем состоянии научно-исследовательской работы и математики в Советском союзе.

Второй всесоюзный математический съезд с удовлетворением отмечает, что за последние четыре года, истекшие после первого съезда, математика в СССР достигла значительных успехов. Результаты, полученные советскими математиками за последнее время, бесспорно выдвигают советскую математику на одно из первых мест в мире.

Съезд констатирует значительный рост научно-исследовательских институтов по математике, успешную подготовку новых кадров молодых научных работников, поднятие уровня и качества научно-исследовательской работы по математике, внедрение плановости в работе, изжитие разобщенности между отдельными математическими школами и научное обслуживание конкретных запросов социалистического строительства и обороны страны.

В силу сложившихся исторических условий в прошлом в нашей математике были представлены два направления, из которых одно характеризовалось общностью постановки проблем и отвлеченным характером исследований. Для другого же направления характерным являлась конкретная тематика, связанная с задачами математического естествознания, забота об эффективности в решениях задач, без забвения, однако, строгости и четкости общих теоретических основ. Оба эти направления были представлены в различных городах Союза. К настоящему времени съезд с удовлетворением констатирует, наряду с общим подъемом и ростом активности обоих направлений, их взаимное сближение.

Первое из указанных направлений, богатое общими идеями и руководящими принципами, начинает с большим успехом применять их к конкретным проблемам.

Что же касается второго направления, оно, в силу исключительно благоприятных условий, сложившихся в СССР в результате политики индустриализации и создания самостоятельной передовой техники,

еще более сблизились с задачами научного естествознания и техники, с одной стороны, и с другой, на основе накопленного богатого конкретного материала обогатилось новыми идеями, направленными к установлению общих принципов.

Съезд считает необходимым обеспечить и в дальнейшем развитие советской математики по указанным двум магистралям, способствуя еще большему их взаимному сближению.

Грандиозный рост науки в Союзе делает необходимым постоянно вносить различные коррективы в организацию математической работы. Кроме того, несмотря на указанные успехи советской математики, съезд отмечает наличие целого ряда недостатков в организации научной работы по математике.

В целях устранения этих недостатков и для обеспечения наиболее благоприятных условий развития математики съезд считает необходимым проведение следующих мероприятий, относящихся к различным областям организации научной математической работы.

РАЗВИТИЕ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УЧРЕЖДЕНИЙ

1. Съезд указывает на настоятельную необходимость организации Математического института в Казани.

Еще в 1931 г. на конференции по планированию в Москве была вынесена резолюция об организации в первую очередь Математического института в Казани. В настоящее время в Казани имеется крупная математическая школа в направлении алгебры и специальных вопросов обыкновенных дифференциальных уравнений (проблема устойчивости и т. д.).

Съезд считает настоятельно необходимым организацию института с 1 января 1935 г.

2. Необходимо усиление Московского математического института по разделу механики и математической статистики.

В Ленинграде, в связи с отъездом Института Академии наук в Москву, необходимо усиление теоретического отдела новыми штатными единицами.

3. Необходимо с совершенной определенностью констатировать ненормальное положение математических институтов в Томске, Тифлисе, Харькове и Минске, а также и университетов в отношении числа квалифицированных научных работников.

Для помощи этому делу желательно установить тесную и постоянную связь центральных математических институтов Москвы и Ленинграда с упомянутыми институтами, а также университетами, которая в организационном отношении может осуществляться в следующих формах:

а) Шефство Центрального института над определенным из вышеупомянутых институтов. Это шефство должно выражаться в том, что крупные научные работники Центрального института прикрепляются на несколько лет к одному из институтов или университетов для осуществления научного руководства.

б) Необходимо усилить комплектование кадров упомянутых институтов путем отправки в эти институты кончающих аспирантуру, причем эту отсылку желательно осуществлять не единично, а группами.

в) Желательно в ближайшее время привлечь для работы в упомянутых институтах крупных научных работников из центра.

г) Желательно установить большую гибкость перехода аспирантов из одного института в другой, в связи с их специальностью.

4. Систематически командировать работников провинции в основные научные центры, в частности настаивать на безусловной необходимости научных командировок в крупные центры для аспирантов, посылаемых по окончании аспирантуры в провинцию (минимум на 4 месяца в первые два года).

5. Организовать при научно-исследовательских институтах консультации для провинциальных работников, в частности по вопросам подготовки кандидатских диссертаций. Практиковать также командировки для работы над диссертациями при крупных научно-исследовательских институтах. Такие командировки, как общее правило, желательны на сравнительно длительный срок (ориентировочно на один год).

6. Организовать систематические выезды работников основных научных центров для чтения лекций в провинцию (на срок до 2 месяцев).

7. Желательно сосредоточить подготовку аспирантов в наиболее крупных математических центрах.

8. Съезд обращает внимание наркомпросов и других наркоматов на значительное количество подготовленных молодых кадров в центральных институтах, правильное использование которых в провинциальных исследовательских институтах, вузах и втузах уже в настоящий момент может значительно повысить качество преподавания и развить научную работу на местах.

В настоящее время наблюдаются факты неохотного привлечения молодых квалифицированных работников из центра на места.

9. Необходимо отметить ненормально большую нагрузку молодых научных работников в провинциальных университетах. Для того чтобы выйти из этого положения, необходимо укрепить в материальном отношении соответствующие кафедры в их научно-исследовательской работе.

ВОПРОСЫ ПЛАНИРОВАНИЯ

1. Просить президиум Математической ассоциации, учитывая результаты математического съезда, а также план работы математических институтов, подготовить к октябрю 1934 г. конференцию для обсуждения вопросов перспективы дальнейшей научной работы.

В связи с этим необходимо предварительное представление математическими институтами планов и пожеланий в этом направлении. Желательно, чтобы конференция, кроме общих вопросов перспективных планов, выдвинула и конкретные предложения к их осуществлению (премиальные темы и т. д.).

2. Для установления живой связи с социалистическим строительством привлечь к участию в конференции представителей соответствующих наркоматов и работников крупных научно-технических институтов. Кроме того, желательно устройство местных конференций с представителями производственных институтов.

ИСТОРИЯ И ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

Съезд с удовлетворением констатирует, что протекавшие со времени первого съезда четыре года дали значительные сдвиги в деле развития научной работы по истории и методологии математики.

Съезд отмечает, что кадры научных работников в этих областях выросли в количественном и качественном отношении и что в рядах специалистов математиков появился активный интерес к историческим и философским вопросам и к их марксистской разработке.

Съезд отмечает повышение удельного веса историко-философских работ и деятельности руководящих исследовательских институтов, а также образование при Академии наук СССР Института истории науки и техники с физико-математической секцией.

Съезд одобряет предпринятый Техничко-теоретическим издательством и издательством Академии наук выпуск работ классиков, исторических монографий и сборников по философии математики. Однако съезд считает недостаточными эти достижения.

Съезд считает необходимым:

1) чтобы в журнальной литературе наряду с исследованиями конкретно-математического характера печатались исследования по истории и философии математики;

2) чтобы при ведущих научно-исследовательских институтах была более широко организована подготовка кадров научных работников в этих областях и особо выделена специальность истории математики.

При этом съезд считает целесообразным учреждение аспирантуры по истории математики и дополнительной специализации по философии некоторой части аспирантов-математиков.

О КАДРАХ

1. Желательно в отношении университетского преподавания на математических факультетах повысить активность студентов в их самостоятельной, посильной для них работе. Для этой цели целесообразно разгрузить общеобязательную программу и число часов обязательных занятий на старших курсах, употребив остающееся время на домашнюю работу, а также на специальные семинары, не прикрепляя эти семинары к определенным курсам, а оставляя свободу выбора их в связи со специализацией студентов. Организация домашней работы может быть проведена заданием небольших тем для практических занятий, семинаров и научных кружков.

2. Наиболее способным из окончивших аспирантуру желательно предоставить возможность оставаться научными сотрудниками инсти-

туда на некоторый срок, например на 2 года. Для этого необходимы дополнительные штатные единицы.

Такое оставление явится подготовкой к их самостоятельной работе в их дальнейшей деятельности.

3. Для выдающихся научных работников желательно выделение специальных стипендий (3 стипендии на год) и годовичных отпусков, которые позволили бы им вести исключительно исследовательскую работу там, где имеется подходящая научная обстановка для такой работы.

Таким стипендиатам необходимо обеспечить и благоприятные бытовые условия.

ОЛИМПИАДЫ

Съезд считает необходимым создать среди широчайших слоев молодежи математическое движение с целью развития интересов к математике, поднятия математической культуры и выявления одаренной молодежи, что даст возможность создать для нее благоприятные условия работы и в дальнейшем надлежащим образом ее использовать. Формы этого движения выяснятся в процессе работы. В качестве первых мероприятий на ближайший год съезд считает необходимым:

1. Проведение в Ленинграде, Москве и ряде других крупных городов математических олимпиад среди школьников 9-го и 10-го годов обучения и кончающих рабфаковцев.

2. Создание сети математических кружков в школах и районных объединениях.

3. Предусмотреть в планах Технико-теоретического издательства снабжение этих кружков, учащихся и учащихся литературой и журналами.

4. Создание маленького — в 1—1½ листа, — но массового много-тиражного ежемесячного журнала, организующего и направляющего все движение.

Университеты могут использовать олимпиады для комплектования своих математических, механических и физических факультетов.

5. Просить Наркомпрос об отпуске средств, необходимых для осуществления этого движения.

ОБМЕН НАУЧНЫМИ СИЛАМИ И СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЕ КОНФЕРЕНЦИИ

1. Для укрепления связи между научными центрами считать необходимой плановую организацию обмена научными силами путем взаимного приглашения иногородних научных работников на срок от 1 до 3 месяцев для чтений циклов лекций, ведения семинаров, непосредственного участия в научной работе.

2. Просить КСУ о закреплении за научными учреждениями жилищных фондов и специального снабжения для облегчения приглашения иногородних ученых.

3. Учитывая чрезвычайно благотворный опыт Международной конференции по дифференциальной геометрии в мае 1934 г. в Москве, систематически организовывать узкоспециализированные международные конференции (ориентировочно на 10 иностранных и 30—40 внутрисоюзных участников).

Предположительно в 1935 г. организовать конференцию по топологии (в Москве), в 1936 г. конференцию по теории вероятности (в Москве), в 1936—1937 гг. по истории и философии математики (в Москве); в 1935 г. конференцию по уравнениям математической физики (в Ленинграде); в 1936—1937 гг. конференцию по теории чисел (в Ленинграде); в 1935—1936 г. конференцию по алгебре (в Киеве).

ОБ ИЗДАТЕЛЬСТВЕ И ЖУРНАЛАХ

Съезд констатирует, что за время, прошедшее после первого съезда, математическая литература на русском, украинском и других языках сильно возросла как количественно, так и качественно. В особенности следует отметить продукцию, данную Государственным технико-теоретическим издательством РСФСР и издательством Академии наук СССР.

Съезд считает необходимым дальнейшее расширение издательской работы, в особенности по следующим направлениям:

1. Приветствуя инициативу ГТТИ в деле создания научных энциклопедий, съезд считает желательным возможное ускорение работы по выпуску математической энциклопедии.

2. Считать необходимым дальнейшее продолжение серии классиков математики и пополнение ее работами классиков XIX и XX вв.

3. Считать необходимым в каждом из основных научных центров (Ленинград, Москва, Казань, Харьков, Киев, Тифлис) иметь математический журнал. Кроме того, издавать центральный журнал на иностранных языках, печатающих важнейшие работы советских математиков. Добиться регулярности выпуска журналов.

4. Считать необходимым издание серии научных монографий, частично параллельно на иностранных языках с постоянной авторской редакцией. Вопрос о составе редакции поручить согласовать издательству с Математической ассоциацией.

5. Считать явно недостаточной существующую информацию о научной работе по математике в общей, научной и научно-популярной прессе. В основных научно-популярных журналах должны даваться как информация о работе научных математических учреждений и крупнейших ученых советской математики, так и освещение актуальных проблем современной математики и философии математики.

6. Отметить чрезвычайно удачный опыт журнала «Фронт науки и техники».

7. Считать необходимым издание нового журнала «Успехи математических наук», печатающего обзоры современных направлений математики и перепечатающего полностью наиболее интересные статьи из мировой математической литературы.

8. Начать издание журнала, посвященного делу преподавания математики — элементарной в средней школе и высшей во вузах и вузах.

9. Организовать издание регулярно выходящего научно-реферативного журнала, хотя бы путем использования материала иностранных реферативных журналов.

10. Для беспрепятственного дальнейшего развития исследовательской работы съезд считает необходимым в организационном отношении превращение Техничко-теоретического издательства во Всесоюзное физико-математическое издательство, имеющее в национальных республиках свои секции.

Съезд отмечает необходимость быстрее развития издания научной литературы на национальных языках.

11. Признать необходимым включить в литературную работу как по научной литературе, так и по учебной план научно-исследовательских институтов.

12. Считать необходимым освобождение от педагогической работы в учебных заведениях или институтах авторов наиболее важной научно-учебной литературы.

13. Настаивать на более систематическом участии научно-исследовательских институтов в составлении планов работы издательства и в выделении авторов для написания основных учебников для высшей и средней школы. В частности, установить более тесный контакт между издательством и Комитетом по делам высшей школы.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЩЕСТВА

Отмечая широкую работу, развернутую Московским, Харьковским и Киевским математическими обществами как в направлении научно-исследовательском, так и в направлении привлечения новых работников к математическому исследованию и широкой массовой работе, съезд полагает, что планомерная работа математических обществ может и должна играть большую роль в математической жизни Советского союза.

Задачами общества в основном являются:

1. Организация научных заседаний с научными докладами и дискуссиями.

2. Широкая постановка философско-методической работы в направлении внедрения в математические исследования методов диалектического материализма.

3. Организация научно-реферативной деятельности.

4. Широкая организация научно-популяризационной работы в области математики.

5. Специальная работа по повышению квалификации преподавателей математики вузов и педвузов.

6. Вовлечение работников средней школы в научную работу путем организации специальной (элементарно-научной) тематики.

7. Организация методико-педагогической помощи в области преподавания математики в средней школе.
 8. Работа по выявлению математических дарований среди школьной молодежи, их поддержка и продвижение.
-

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ЛЕНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. С. БУБНОВА

И. И. Чистяков (Москва)

I

Весной 1934 года Ленинградским государственным университетом им. А. С. Бубнова было проведено чрезвычайно ценное и важное мероприятие в области математического образования в нашей стране: была организована математическая олимпиада среди учащихся средних школ г. Ленинграда (девятилеток и рабфаков). Устраивая эту олимпиаду, университет руководился тем соображением, что грандиозные задачи второй пятилетки в области социалистического строительства настоятельно требуют возможно быстрой и лучшей подготовки новых кадров работников социалистической стройки. В этой подготовке приобретение учащимися знаний по математике имеет особенно важное значение, так как на математике основывается не только всякая техническая деятельность, но она же является необходимой основой для научно-исследовательской работы и в области естественных и общественных наук. Устраиваемая университетом олимпиада должна была дать ценные материалы для суждения о степени математической подготовленности абитуриентов наших средних школ и о ведении в них преподавания математики. В то же время олимпиада должна была выявить наиболее одаренных и подготовленных молодых людей в области математики, подобно тому как в настоящее время принимаются меры к выявлению талантливой молодежи в области техники, искусства, физкультуры и пр.

Проведение олимпиады было организовано чрезвычайно продуманно и серьезно. Был организован специальный комитет олимпиады в составе председателя профессора Б. Н. Делоне, 10 других профессоров и преподавателей ЛГУ, а также представителей парткома ЛГУ, комитета ВЛКСМ, сектора научно-технической пропаганды, горсовета и преподавателей математики. Самое проведение олимпиады комитетом было разбито на три тура. В первом туре была проведена широкая информация о предстоящей олимпиаде, ее целях и устройстве, а также широко распространен ряд задач для ориентации будущих участников в характере предстоящего соревнования. Кроме того, комитет обратился к учебным заведениям с предложением командировать для участия в олимпиаде своих сильнейших по математике учащихся выпускных классов в количестве: 3 человека на каждую группу девятилетки, 5 человек на каждую выпускную группу рабфаков и 10%

из общего числа оканчивающих курсы по подготовке в вузы. Во втором туре присланные учащиеся были подвергнуты письменному испытанию по математике при ЛГУ с целью выделения из них наилучших математиков средней школы г. Ленинграда в 1934 г. С выделенными лицами была при ЛГУ проделана дополнительная работа по подготовке к третьему туру олимпиады, состоявшая в чтении им лекций по математике, ведении занятий, решении задач и т. п. После этого состоялся третий тур олимпиады, причем упомянутым лицам были даны новые задачи для решения. На основании представленных решений 11 человек были признаны победителями, а 10 следующих по конкурсу товарищей — достойными премирования. Результаты соревнования были объявлены в ЛГУ в торжественной обстановке.

II

Фактически участников олимпиады оказалось менее, чем предполагал комитет, именно 307 человек. Уменьшение произошло потому, что некоторые школы не прислали своих выпускников на конкурс, мотивируя это слабостью своих абитуриентов по математике, другие же послали менее участников, чем предполагалось, например, рабфак Института путей сообщения — только трех, мотивируя это тем, что он готовит кадры для себя, а не для университета... В общем же инициатива комитета была встречена учащими и учащимися средних учебных заведений г. Ленинграда с полнейшим сочувствием и интересом, и задачи, предварительно опубликованные комитетом олимпиады, с увлечением прорабатывались по школам ¹⁾. 2-й тур олимпиады фактически представлял собой отборочное соревнование. Упомянутые 307 человек были собраны 18 апреля в 11 часов утра в университете и после вступительных разъяснений, сделанных проф. Б. Н. Делоне для рабфаковцев и проф. В. М. Смирновым — для школьников, каждому участнику олимпиады были предложены три несложных задачи: одна по алгебре — на решение уравнений, другая — по планиметрии на доказательство и третья по стереометрии — на вычисление с тригонометрией. Задачи были подобраны настолько нетрудные, что умение решать их еще далеко не обеспечивает возможности нормально работать на 1 курсе втуза, не говоря уже о физматах университетов; более сложные и трудные отделы элементарной математики в них включены не были, ввиду указания представителей учебных заведений, что эти отделы (тригонометрические уравнения и преобразования, решение треугольников, теория соединений и бином Ньютона, задачи на построение и т. д.) ими не проходились вовсе или изучались слабо.

Все три задачи решили только 49 человек (24 школьников, 24 рабфаковца и 1 индивидуальный участник), 29 человек решили по две задачи, а остальные 69% явившихся написали работу неудовлетворительно, решив лишь одну, или ни одной задачи, а 11 человек из

¹⁾ Мы помещаем эти задачи в настоящем сборнике в разделе упражнений для учащихся. (Ред.)

числа явившихся совсем не подали работ. Поэтому к окончательному соревнованию были допущены только упомянутые 49 человек, из которых на него явилось 48. Таким образом участников последнего испытания явилось значительно менее, чем ориентировочно предполагал комитет олимпиады, рассчитывавший на участие в нем 100—150 лучших математиков из абитуриентов школ 1934 г. Как было упомянуто, с ними была проделана большая дополнительная работа при ЛГУ, причем в качестве материала для подготовки комитетом были составлены и сообщены участникам олимпиады 90 задач из различных отделов алгебры, геометрии и тригонометрии, требующие для своего решения некоторой находчивости и сообразительности. Такого же характера были и задачи, предложенные на окончательном испытании, которое должно было выявить победителей и вообще «лучших из лучших» ленинградских математиков, оканчивающих школу в 1934 г. Ввиду большого интереса, представляемого многими из задач, данных для подготовки к испытанию и на самом испытании, мы помещаем некоторые из них в настоящем сборнике в разделе задач для решения наших читателей.

III

Основная задача, поставленная себе комитетом олимпиады, именно выявление лучших математиков среди оканчивающих курс средней школы в текущем учебном году, была таким образом умело и искусно выполнена. Но наряду с этим комитетом был собран огромный материал, касающийся постановки преподавания математики в средней школе Ленинграда, который позволяет сделать выводы, имеющие значение для суждения о достижениях в области математического образования и о настоятельных его нуждах в СССР вообще. Этот материал был разработан особой комиссией из руководителей олимпиады под председательством проф. Г. М. Фихтенгольца. Кроме материалов, доставленных проведением 2-го и 3-го туров олимпиады, комиссия имела еще беседы с учащимися и с рядом наиболее компетентных преподавателей средних школ, в частности — из числа членов комитета олимпиады, ведущих занятия в девятилетках и рабфаках. Затем была использована работа существующего при ЛГУ Института по повышению квалификации педагогов, а также устроено обширное совещание, в котором приняли участие, кроме профессоров ЛГУ, еще профессора некоторых вузов, представители горono, инструкторы и методисты районов и др. В результате комиссия составила обширную записку, касающуюся всех сторон вопроса о постановке математического образования в СССР.

Не имея возможности коснуться всех выводов, сделанных названной комиссией, мы остановимся лишь на некоторых отмечаемых ею недочетах постановки у нас преподавания математики, которые, впрочем, и ранее неоднократно констатировались в разных органах, ведающих делом народного образования в стране. Так, 2-й и 3-й туры олимпиады подтвердили и ранее замеченные дефекты в математическом образовании наших школьников, заключающиеся в том, что

они получают очень слабое теоретическое развитие, а также страдают недостатком геометрического представления. Несколько лучше обстоит дело с техникой буквенных вычислений, но и она, в особенности в области тригонометрии, недостаточна. Вообще математический багаж, получаемый учащимися в школе, в настоящее время является еще весьма малым. В частности, учащиеся затрудняются ясно, связно и последовательно излагать свои мысли по теоретическим вопросам. Во многих учебных заведениях не прорабатывается полностью программа, как это уже было упомянуто выше, или же прорабатывается с крайне слабым прохождением более трудных отделов. Наиболее одаренные не выделяются как-либо школой, и с ними не ведется дополнительной работы и т. п.

Одной из основных причин указанных и других отрицательных явлений у нас в области математического образования комиссия считает недостаточную квалификацию преподавателей математики, и с этим нельзя не согласиться. Действительно, даже в Ленинграде имеется 73% преподавателей школ I ступени и 55% преподавателей школ II ступени без высшего образования. Во многих же других городах Союза математику преподают лица, прошедшие только семилетку или краткосрочные педагогические курсы. Педагогические техникумы и педвузы пока еще тоже выпускают преподавателей невысокой квалификации. Так как при стремительном росте в СССР числа школ количество достаточно знающих преподавателей математики, выпускаемых вузами и педвузами, еще долго будет отставать от необходимой нормы, то желательно принять меры для повышения квалификации уже имеющих преподавателей. Следует уничтожить имеющуюся сейчас уравниловку и давать преимущества служебного и материального свойства тем учителям, которые оказываются более талантливыми, знающими и особенно успешно работающими педагогами. Крайне желательно притти им на помощь и изданием соответствующей научной и учебной литературы. В настоящее время источником сведений по математике как для преподавателя, так и для ученика является только стабильный учебник. Но изданные до сих пор стабильные учебники оказываются мало удовлетворительными. Поэтому желательно издание математических пособий, журналов, сборников, хрестоматий и пр., из которых учителя математики могли бы черпать пополнение и расширение своих математических сведений.

Подобно этому желательно издание математической литературы, в частности математического журнала, для учащихся. В среде учеников каждой школы всегда имеется немало лиц, способных к математике и интересующихся ею, но отсутствие у нас каких бы то ни было математических книг, кроме стабильных пособий, не дает выхода этому интересу. Полезным было бы устройство при школах математических кружков наподобие имеющих уже драматических, шахматных, физкультурных и иных. В высшей степени желательно устройство местных и районных соревнований, подобных организованной ЛГУ олимпиаде, которые способствуют поднятию интереса

к математике в широких кругах преподавателей и учащихся. Заметим, что соревнования подобного рода под именем конкурсов издавна существуют во Франции, где они играют существенную роль в отношении своевременного выявления наиболее одаренной молодежи и общего повышения уровня математического образования.

В заключение своего доклада, который кроме приведенных содержит много и иных разумных и ценных пожеланий относительно улучшения постановки у нас преподавания математики, комиссия правильно указывает, что ошибки и недочеты в постановке преподавания математики медленнее и труднее поддаются исправлению, чем пробелы в работе по другим областям, и имеют весьма важное народно-хозяйственное значение. Необходимо помнить, что работа школы есть работа над будущим советской культуры, науки, техники и народного хозяйства. Особенно большое значение проблема работы школы имеет для нормального комплектования и через это для нормальной деятельности советских техникумов, вузов и в особенности для университетов.

В общем, все изложенное показывает большое значение проведенной ЛГУ математической олимпиады, и нельзя не быть благодарным комиссии, которая ее устроила и подвергла всесторонней обработке ее результаты.

ЗАДАЧИ

(Задачи № 51—64 были предложены на математической олимпиаде в Ленинграде. Редакция предлагает присылать решения по адресу: Москва, центр, Комсомольский пер., 6, ОНТИ. Главная редакция общетехнической литературы и картографии. В редакцию «Математического просвещения».)

51. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned}x^2 &= a + (y - z)^2, \\ y^2 &= b + (z - x)^2, \\ z^2 &= c + (x - y)^2.\end{aligned}$$

52. Доказать, что уравнение

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

при вещественных a , b и c не имеет комплексных корней.

53. Найти предел величины

$$\left(\cos \frac{a}{x}\right)^x,$$

когда x неограниченно возрастает, принимая последовательно целые значения $x = 1, 2, 3, \dots$ до бесконечности.

54. Доказать, что расстояние произвольной точки окружности от хорды есть среднее пропорциональное между расстояниями от той же точки до касательных, проведенных в концах этой хорды.

55. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x) - \operatorname{arctg}(a-x)}.$$

56. Доказать, что

$$\frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} + \dots + \frac{n+p}{(n+p+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+p+1)!}$$

57. Исключить θ и φ из уравнений:

$$\begin{aligned}a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta &= m, \\ b \sin^2 \varphi + a \cos^2 \varphi &= n, \\ a \operatorname{tg} \theta &= b \operatorname{tg} \varphi.\end{aligned}$$

58. Показать, что если a, b, c — стороны треугольника, то корни уравнения

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

будут мнимые.

59. Доказать, что прямые, соединяющие вершины треугольной пирамиды с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке.

60. Показать, что если α и β — корни уравнения

$$x^2 + px + 1 = 0,$$

а γ и δ — корни уравнения

$$x^2 + qx + 1 = 0,$$

то

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) = q^2 - p^2.$$

61. Пересечь данную трехгранную пирамиду плоскостью так, чтобы в сечении получился ромб.

62. По четырем сторонам трапеции вычислить ее диагонали.

63. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена секущая, вторично пересекающаяся с окружностями в точках P и Q .

• Найти геометрическое место точек, описываемое серединою M отрезка PQ , когда секущая вращается около A .

64. Три грани трехгранного угла с взаимно перпендикулярными ребрами пересекают шар по трем кругам. Доказать, что сумма площадей этих кругов не изменится, если повернуть этот трехгранный угол около его вершины так, чтобы его грани не перестали пересекать шар.

65. Найти непрерывную функцию $F(x)$, удовлетворяющую при всяком значении x соотношению:

$$a \cdot F(x + 1) - b \cdot F(x) = cx + d,$$

где a, b, c, d — данные числа, $F(0) = N$ и на интервале от 0 до 1 функция линейна.

66. Найти интеграл:

$$\int \frac{\sqrt{\sin x} \, dx}{1 + \sin^2 x}.$$

А. А г а м а л о в (Москва)

67. Показать, что корни уравнения

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$$

суть:

$$4 \cos^2 \frac{\pi}{7}, \quad 4 \cos^2 \frac{2\pi}{7}, \quad 4 \cos^2 \frac{3\pi}{7}.$$

68. Решить уравнение

$$x^3 + 9x^2 - 33x + 27 = 0.$$

69. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg} 2x}.$$

70. Вычислить площадь, ограниченную кривой

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 7 = 0.$$

71. Разложить в ряд по степеням x функцию

$$f(x) = e^{x \cos \alpha} \sin(x \sin \alpha).$$

72. Найти геометрическое место центров равносторонних треугольников, вписанных в данный эллипс.

73. Найти наименьшие значения функций

$$\frac{a^m + x^m}{2} - \left(\frac{a+x}{2}\right)^m \quad \text{и} \quad \frac{a^m + b^m + x^m}{3} - \left(\frac{a+b+x}{3}\right)^m,$$

причем a, b, x — положительные числа и $m > 1$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

(Были предложены участникам Ленинградской олимпиады 1934 г. для подготовки ко второму туру.)

Решить уравнения:

1. $mqx^2 + (pq - mn)x - np = 0.$

2. $(x^2 + ax)^2 + m(x^2 + ax) + n = 0.$

3. $\frac{1}{1 - \sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}.$

4. $\frac{1 - ax}{1 + ax} \sqrt{\frac{1 + 2ax}{1 - 2ax}} = 1.$

5. $\frac{1}{x} + \frac{1}{a} = \sqrt{\frac{1}{a^2}} + \sqrt{\frac{1}{a^2 x^2} + \frac{1}{x^4}}.$

6. $\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{2a+x}.$

7. $\sqrt{a-x} + 2\sqrt{a+x} = \sqrt{a-x} + \sqrt{ax+x^2}.$

Примечание. В задачах 5, 6 и 7 допускаются только такие решения, при которых подкоренные выражения не отрицательны; число a — положительное.

Решить системы уравнений:

8. $x^2y + xy^2 = 30; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}.$

9. $x + y + z = a; \quad x^3 + y^3 + z^3 = a^3; \quad xy + bz + 0.$

Решить уравнения:

11. $\lg \sqrt{5x-4} + \lg \sqrt{x+1} = 2 + \lg 0,18.$

12. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 7^x + 7^{x-1} + 7^{x-2}$

24. Если в правильном пятиугольнике проведем все диагонали, то они ограничивают второй правильный пятиугольник.

25. Если основания высот треугольника соединим прямыми, то получим треугольник, для которого эти высоты будут биссектрисами.

26. Если стороны двух треугольников параллельны, но не равны, то прямые, соединяющие вершины одного треугольника с соответственными вершинами другого, пересекаются в одной точке.

Построить с помощью линейки и циркуля:

27. Треугольник по периметру и двум углам.

28. Треугольник по основанию, высоте и углу при вершине.

29. Окружность, касательную к двум данным параллельным прямым и к данной окружности.

30. Построить все окружности заданного радиуса, касательные к данной окружности и к данной прямой.

31. Построить окружности, касательные к двум данным пересекающимся прямым, и притом к одной из них в заданной точке.

32. Построить треугольник по стороне, прилежащему углу и разности двух других сторон.

33. Окружность, касательную к данной окружности в данной на ней точке и к данной прямой.

34. Окружность, касательную к данной прямой в данной на ней точке и к данной окружности.

Решить с помощью тригонометрии задачи:

35. Сектор круга радиуса r с углом в n градусов свернут в виде конуса. Определить угол между образующей и основанием.

36. В конус вписан полушар, так что плоская сторона его лежит на основании конуса, а выпуклая сторона касается всех образующих. По длине образующей l и углу α между образующей и основанием найти объем полушара.

37. Определить отношение объема конуса к объему описанного около него шара, если образующая наклонена к основанию под углом α .

38. В конус вписан шар. Высота конуса h , угол образующей с плоскостью основания α . Определить поверхность шара.

39. Основанием призмы служит ромб со стороной a и углом α . Боковые ребра имеют длину b и наклонены к основанию под углом β . Определить объем призмы и площадь перпендикулярного сечения.

40. В трехгранной призме известны длина бокового ребра l , углы α , β между ребром и прилежащими сторонами основания, длины этих сторон a , b и двугранный угол γ между боковыми гранями, проходящими через эти стороны.

Определить объем призмы.

41. Каждое ребро параллелепипеда равно a . Углы между ребрами, сходящимися в одной из вершин, острые и все равны α . Определить объем параллелепипеда.

42. В наклонном параллелепипеде с прямоугольным основанием даны длины ребер и углы, образуемые боковым ребром со сторонами основания. Найти объем параллелепипеда.

43. В правильной треугольной пирамиде дан угол между двумя боковыми ребрами. Найти угол между боковым ребром и основанием.

44. Дана пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник с острым углом α . Боковые ребра равны l и наклонены к основанию под углом β . Определить объем пирамиды.

45. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда проведена плоскость, параллельная диагонали основания, не пересекающей эту диагональ параллелепипеда. По сторонам основания a , b и высоте $2h$ определить внутренние углы фигуры, по которой плоскость пересекает параллелепипед.

46. Через среднюю линию основания правильного тетраэдра проведена плоскость, пересекающая два боковых ребра и наклоненная к основанию под углом α . Определить площадь сечения.

47. В последующих задачах найти x (в задачах 1—5 в общем виде).

1) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$.

2) $1 + \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x = 0$.

3) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{cose} c x \operatorname{cose} c 3x$.

4) $\sec^2 \frac{x}{2} + \operatorname{cose} c^2 \frac{x}{2} = 16 \operatorname{ctg} x$.

5) $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 2$.

6) $\operatorname{arctg} x = \arcsin \sqrt{\frac{a}{a+b}}$.

7) $\arcsin x = \arcsin a + \arcsin b$.

8) $\operatorname{arctg} x = \arccos a + \arccos b$.

Б И Б Л И О Г Р А Ф И Я

А. Шапошников и Н. Вальцов, Сборник алгебраических задач для средней школы, ч. II, 9-й год обучения, изд. 14-е, исправленное, 1934 г.

Рассматриваемая книга представляет собою весьма незначительно переделанное и исправленное 13-е издание сборника алгебраических задач тех же авторов, которое было принято в качестве стабильного руководства для средней школы. В нем помещено большое количество задач, соответствующих программе 8-го и 9-го годов обучения средней школы. Некоторым отделам при этом предпосылается краткое теоретическое введение. Чем руководствовались авторы, давая при одних главах такие введения, а при других — нет, понять трудно; во всяком случае, наиболее сложные последние статьи курса оставлены без пояснений. Но книга много выиграла бы, если бы и прочие приведенные пояснения тоже были опущены, ибо они составлены крайне бессистемно и вообще нсудачно. Так, в § 1 не упомянуто, что приведенные теоремы относятся к арифметическим корням, да и далее об этом ничего не говорится. Зато без всяких пояснений вводится понятие о корне с отрицательным показателем, которое не входит в программу, не встречается в стабильном учебнике и вообще почти никогда не употребляется в алгебре, в том числе и в рассматриваемом задачнике. В § 2 авторы пользуются неупотребляемыми терминами: «полная и неполная степень» и «иррациональный корень», не давая им объяснения. В § 4 сказано: «сократить показатель корня...», но с чем сократить — не указано; там же сказано: «уничтожить иррациональность знаменателя...», однако в приве-

денных примерах, например $\sqrt[3]{\frac{8}{xy}}$ знаменатель xy в действительности не содержит никакой иррациональности. В том же параграфе авторами вводится еще термин, не употребляемый в алгебре: «нормальный вид корня», которым, однако, они далее не пользуются. Следующие параграфы озаглавлены: «Сложение и вычитание корней, умножение и деление корней» и прочее, тогда как в них рассматриваются действия над иррациональными выражениями. В § 12 вводится без объяснений понятие о корне с дробным показателем, которое в алгебре почти никогда не употребляется. В § 9 говорится только об уничтожении иррациональности в знаменателе дроби, но не упоминается об уничтожении ее в числителе, чем автор пользуется, например, в задаче 103, глава XI. В § 13 говорится: «в алгебре показывается, что $i^2 = -1$ ». В действительности, это в алгебре не показывается, а принимается за определение числа i .

В § 2 главы XII в статье о двучленных уравнениях тоже не объяснено, что $\sqrt[n]{a}$ — корень арифметический. Там же указано, что при небольших значениях n двучленные уравнения решаются посредством разложения первых частей на множители, но этот способ решения объяснен позднее, лишь в § 4. Далее, в § 5 говорится о делении обеих частей уравнения на x^2 без рассмотрения вопроса о возможной потере корней. На стр. 53 говорится о возведении обеих частей уравнения в квадрат без заботы о возможности появления посторонних решений. На стр. 74 говорится, что «если абсолютная величина знаменателя прогрессии менее 1, то в ней можно рассматривать неограниченную последовательность членов». Но это же возможно, конечно, и при всяком значении знаменателя прогрессии. Не останавливаясь на

других промахах теоретических разъяснений, отметим, что к более трудным частям курса, каковы: понятие о функции, логарифмы, бином Ньютона, непрерывные дроби и прочее, они совсем не даны.

Обращаясь к задачам, отметим, что они дают много материала для усвоения техники и навыков в алгебраических преобразованиях, но не приспособлены к развитию у учащихся математического понимания. Сухостью и холодом веет, например, от задач, приведенных в отделе на действия с иррациональными выражениями. Эти действия не использованы для решения каких-либо вопросов о числах,

например, о сравнении величины чисел $3\sqrt{5}$ и $5\sqrt{2}$ или $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ и тому подобных. Крайне мало приведено примеров, в которых действия над иррациональными выражениями приводят к рациональному результату, а между тем такие примеры наиболее интересны и поучительны. То же можно сказать и об отделе о мнимых числах, где не сделано никаких приложений их к арифметическим вопросам. Между прочим, во введении к задачам на мнимые числа сказано, что деление их выполняется через умножение делимого и делителя на выражение, сопряженное с

делителем, тогда как, например деление $\frac{6+3i}{2+i}$ легче выполняется без рекомен-

дуемого приема. Многие примеры и задачи страдают искусственностью и крайней сложностью, например задачи на корни с отрицательными показателями: № 29, 30 и др. Условия многих задач выражены недостаточно ясно, например № 100, глава XI: «Выразить неполный квадрат суммы из корней уравнения $x^2+px+q=0$ ». Задачи на построение графиков часто даются с слишком большими и неподходящими для вычерчивания коэффициентами, например № 21, глава X: изобразить графическим формулу

$$\lambda = 606,5 + 0,305 t,$$

или № 48, стр. 42:

$$s = 125 t - 4,905 t^2.$$

Задач на составление уравнений биквадратных, двучленных, трехчленных и вообще высших степеней не дано. Задачи на прогрессии № 61 и 62: о падении камня в колодезь и о прыжке авиатора из корзины аэростата решаются и без прогрессий. Задачи на геометрическую прогрессию № 75, 94, 99, 101 и некоторые другие очень трудны.

Есть задачи с одинаковым содержанием, например № 113 XV главы и № 16 XXIV главы одинаковы. В задачах № 21—24 на стр. 110 на бесконечно малые величины не упомянуто, как именно h приближается к нулю, вследствие чего вопрос о бесконечной малости рассматриваемых величин не может быть поставлен. Общего отдела, где встречались бы задачи на различные главы алгебры, в книге нет. Ответы даются не на все задачи, причем этот пропуск иногда относится к весьма трудным задачам, например № 27 на стр. 110. В некоторых случаях, например № 117, стр. 75: «Составить такую бесконечно убывающую прогрессию» — в ответе никакой прогрессии

не дано, а приведено лишь $q = \frac{1}{1+k}$, что не дает возможности судить о первом члене прогрессии. Ответы в проделанных нами на пробу задачах оказались верными, но, в частности, на задачу № 109 XI главы ответ оказался неправильным. Списка опечаток к книге не приложено.

В общем, приходится признать, что внесенные в задачник Шапошникова и Вальцова другими лицами изменения мало его улучшили. Поэтому следует всерьез стремиться к тому, чтобы был составлен новый задачник, более отвечающий современным задачам преподавания математики в советской средней школе.

И. И. Чистяков

СОДЕРЖАНИЕ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Стр.

В. В. Скворцов. О решении уравнений, приводимых к однородным . . .	3
И. И. Чистяков. Замечания к отделу о квадратных уравнениях . . .	7
Р. Н. Бончковский. Покрытие плоскости правильными многоугольниками	15
Б. Я. Берзювский. Тригонометрические функции суммы и разности двух углов	21
П. И. Сапунюв. Преобразование и объединение групп общих решений тригонометрических уравнений	24

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Л. И. Креер. Алгебраические числа и решение геометрических задач на построение с помощью линейки и циркуля	32
А. В. Грошев. О сравнительной силе простейших признаков сходимости рядов	41
А. С. Агамалов. Об одном частном приеме интегрирования	45
Л. А. Люстерник. Формула Стирлинга	48

ТЕКУЩАЯ ЖИЗНЬ

Постановления Второго всесоюзного математического съезда	52
И. И. Чистяков. Математическая олимпиада Ленинградского государственного университета им. А. С. Бубнова	59

ЗАДАЧИ

Задачи	64
Упражнения для учащихся	66
Библиография	70

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
48	1 сверху	Л. А. Люстерлинг	Л. А. Люстерник
50	12 сверху	$\int_0^n \ln x \, dx = \left x \ln x - \int_0^n dx \right $	$\int_1^n \ln x \, dx = \left x \ln x - \int_1^n dx \right $
51	1 снизу	$\lim \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}}$

Первые 2 опечатки — по вине типографии.

Третья — по вине редактора.

Математическое просвещение.